

THESE

présenté à

**L'UNIVERSITE DE VALENCIENNES ET
DU HAINAUT CAMBRESIS**

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

spécialité électronique

par

PIERRE CAMPISTRON

**CONTRIBUTION A LA CARACTERISATION ULTRASONORE
DES MILIEUX HETEROGENES :
APPLICATION AUX BIOMATERIAUX DE SUBSTITUTION OSSEUSE**

Soutenue le 18 décembre 2002 devant le jury composé de :

M ^{me} M.-C. HOBATHO :	Professeur à l'Université de Technologique de Compiègne	Présidente
M F. COHEN TENOUDJI :	Professeur à l'Université de Paris VII	Rapporteur
M D. KOURTICHE :	Maître de Conférence (HdR) à la Faculté des Sciences et des Techniques de Vandoeuvre les Nancy	Rapporteur
M F. LEFBVRE :	Maître de Conférence à l'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambresis	Examineur
M B. NONGAILLARD :	Professeur à l'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambresis	Directeur de recherche

THESE

présenté à

**L'UNIVERSITE DE VALENCIENNES ET
DU HAINAUT CAMBRESIS**

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

spécialité électronique

par

PIERRE CAMPISTRON

**CONTRIBUTION A LA CARACTERISATION ULTRASONORE
DES MILIEUX HETEROGENES :
APPLICATION AUX BIOMATERIAUX DE SUBSTITUTION OSSEUSE**

Soutenue le 18 décembre 2002 devant le jury composé de :

M ^{me} M. -C. HOBATHO :	Professeur à l'Université de Technologique de Compiègne	Présidente
M F. COHEN TENOUDJI :	Professeur à l'Université de Paris VII	Rapporteur
M D. KOURTICHE :	Maître de Conférence (HdR) à la Faculté des Sciences et des Techniques de Vandoeuvre les Nancy	Rapporteur
M F. LEFBVRE :	Maître de Conférence à l'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambresis	Examineur
M B. NONGAILLARD :	Professeur à l'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambresis	Directeur de recherche

iemn : Institut d'électronique de microélectronique et de nanotechnologie
Département O.A.E, Université de Valenciennes

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé au sein du laboratoire OAE de l'IEMN à l'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambresis.

Professeur certifié, je remercie vivement M Bruneel, alors Directeur du Laboratoire et M Freville, alors directeur de l'Institut Scientifique, de la confiance qu'ils ont témoignée à mon égard en m'accueillant au Laboratoire tout en me permettant de poursuivre mon métier d'enseignant à l'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambresis.

Je tiens particulièrement à remercier Messieurs Deblock, Gharbi, Bruneel, Torguet, et Lefebvre pour les discussions fructueuses sans lesquelles ce travail n'aurait pu être mené à terme.

Je remercie vivement Messieurs Radziszewski, Vavasseur et Descamps pour les réalisations des céramiques d'hydroxy apatite poreuse.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur Nongaillard qui a accepté de diriger mes recherches.

Que Monsieur Cohen Tenoudji trouve ici l'expression de ma plus grande estime pour ses critiques extrêmement fructueuses.

J'adresse enfin mes remerciements les plus sincères à Madame HoBaTho et à Messieurs Cohen Tenoudji et Kourtiche qui ont accepté de juger ce travail.

A Sabine, Lucas et Thomas

A mes parents

A tous ceux qui n'ont malheureusement pu assister à la fin

SOMMAIRE :

<u>INTRODUCTION GÉNÉRALE :</u>	<u>1</u>
---	-----------------

CHAPITRE 1. MODÈLES DE PROPAGATION DANS LES MILIEUX HÉTÉROGÈNES

<u>.....</u>	<u>4</u>
---------------------	-----------------

<u>1.01 INTRODUCTION.....</u>	<u>4</u>
--------------------------------------	-----------------

<u>1.02 GÉNÉRALITÉS ET DÉFINITIONS.....</u>	<u>4</u>
--	-----------------

1.02-1 GÉNÉRALITÉS SUR LES MILIEUX HÉTÉROGÈNES.....	4
--	----------

1.02-1-A NOTIONS D'HOMOGÉNÉITÉ ET D'HÉTÉROGÉNÉITÉ	4
---	---

1.02-1-B MILIEUX HÉTÉROGÈNES	5
------------------------------------	---

1.02-1-C GRANDEURS DESCRIPTIVES D'UN MILIEU HÉTÉROGÈNE	7
--	---

1.02-2 GÉNÉRALITÉS SUR LES ONDES ACOUSTIQUES	8
---	----------

1.02-2-A DÉFINITION DES GRANDEURS MÉCANIQUES	8
---	----------

1-02-2-A-(1) : DÉFORMATION D'UN SOLIDE	8
--	---

1-02-2-A-(2) : CONTRAINTES APPLIQUÉES SUR UN ÉLÉMENT DE VOLUME	9
--	---

1-02-2-A-(3) : LOI DE HOOKE ET CONSTANTES ÉLASTIQUES	10
--	----

1.02-2-B EQUATIONS DE PROPAGATION	10
--	-----------

1-02-2-B-(1) : PROPAGATION D'UNE ONDE PLANE HARMONIQUE DANS UN SOLIDE.....	10
--	----

1-02-2-B-(2) : PROPAGATION D'UNE ONDE PLANE HARMONIQUE DANS UN FLUIDE.....	12
--	----

1-02-2-B-(3) : IMPÉDANCE	13
--------------------------------	----

1-02-2-B-(4) : CONCLUSION	14
---------------------------------	----

<u>1.03 DÉMARCHE SUIVIE</u>	<u>15</u>
--	------------------

<u>1.04 MODÈLE DE BIOT.....</u>	<u>18</u>
--	------------------

1.04-1 EQUATIONS DE PROPAGATIONS.....	19
--	-----------

1.04-1-A RELATIONS CONTRAINTES DÉPLACEMENT.....	19
---	----

1.04-1-B ENERGIE DISSIPÉE	20
---------------------------------	----

1.04-1-C ENERGIE CINÉTIQUE.....	20
---------------------------------	----

1.04-1-D EQUATIONS DE PROPAGATION.....	20
---	-----------

1-04-1-D-(1) : ONDE LONGITUDINALE :	21
---	----

1-04-1-D-(2) : ONDE TRANSVERSALE	21
1.04-2 INTERPRÉTATION DES CONSTANTES PHÉNOMÉNOLOGIQUES.....	21
1.04-2-A CONSTANTES ÉLASTIQUES GÉNÉRALISÉES	21
1.04-2-B DÉTERMINATION DES MODULES ÉLASTIQUES DU MILIEU POREUX	23
1.04-2-C COUPLAGE INERTIEL	24
1.04-2-D COUPLAGE VISQUEUX	24
1.04-3 SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DE PROPAGATION	27
1.04-3-A ONDE LONGITUDINALE	27
1.04-3-B ONDE TRANSVERSALE	28
1.04-4 INFLUENCE DES DIVERS PARAMÈTRES	28
1.04-4-A EN ABSENCE DE COUPLAGE	29
1.04-4-B EFFETS DES COUPLAGES	36
1.04-4-C CONCLUSION.....	41
1.04-5 SIMULATIONS DU MODÈLE DE BIOT POUR UNE CÉRAMIQUE D'HYDROXYAPATITE POREUSE.....	42
1.04-6 ASPECT EXPÉRIMENTAL	46
1.04-6-A MISE EN ÉVIDENCE DE L'ONDE LENTE DE BIOT.....	46
1.04-6-B APPLICATION À DES MESURES SUR DES OS	48
<u>1.05 THÉORIES DE LA DIFFUSION MULTIPLE.....</u>	<u>48</u>
1.05-1 DIFFUSION PAR UNE SPHÈRE.....	50
1.05-1-A SOLUTION DE L'ÉQUATION DE HELMHOLTZ EN COORDONNÉES SPHÉRIQUES.....	50
1.05-1-B CONTRAINTES	51
1.05-1-C DIFFUSION PAR UNE SPHÈRE	51
1.05-2 DIFFUSION PAR UN GRAND NOMBRE DE SPHÈRES	54
1.05-2-A TRANSLATIONS DES VECTEURS DÉPLACEMENTS.....	56
1.05-2-B MODÈLE DE LA MATRICE MULTICENTRÉE.....	58
1.05-3 INTERPRÉTATION PAR LA THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DE LA DIFFRACTION	60
1.05-3-A THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DE LA DIFFRACTION POUR UNE SPHÈRE	60
1.05-3-B COUPLAGE ENTRE DEUX SPHÈRES	61
1.05-3-C INTERPRÉTATION DE LA DIFFUSION MULTIPLE PAR LA THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DE LA DIFFRACTION.....	62
1.05-4 MODÈLE DE FOLDY	64
1.05-4-A ÉQUATION DE LA DIFFUSION MULTIPLE	64
1.05-4-B TRAITEMENT STATISTIQUE :	65
1.05-4-C SENS DE L'APPROXIMATION $\left\langle \tilde{u}^{\text{exc}}(\vec{r}_j) \right\rangle_j \approx \left\langle \tilde{u}'(\vec{r}_j) \right\rangle$	66
1.05-5 MODÈLE DE WATERMAN ET TRUELL.....	68

1.05-6 SIMULATION DU MODÈLE DE WATERMAN ET TRUELL POUR UNE CÉRAMIQUE D'HYDROXY APATITE POREUSE	70
1.05-7 ASPECT EXPÉRIMENTAL	73
<u>1.06 APPLICABILITÉ ET UNIFICATION</u>	<u>74</u>
1.06-1 VOLUME REPRÉSENTATIF ÉLÉMENTAIRE	74
1.06-2 APPLICABILITÉ DES MODÈLES.....	74
1.06-2-A MODÈLES DE DIFFUSION MULTIPLE	74
1.06-2-B MODÈLE DE BIOT	76
1.06-3 UNIFICATION DES MODÈLES.....	77
<u>1.07 CONCLUSION</u>	<u>79</u>
 <u>CHAPITRE 2. MODÉLISATION DU SYSTÈME DE CARACTÉRISATION ACOUSTIQUE</u>	 <u>80</u>
<u>2.01 INTRODUCTION.....</u>	<u>80</u>
 <u>2.02 ETUDE DE LA PROPAGATION SOUS INCIDENCE NORMALE DANS UN MILIEU MULTICOUCHE</u>	 <u>82</u>
2.02-1 INTRODUCTION	82
2.02-2 DÉFINITION DES COEFFICIENTS DE RÉFLEXION ET DE TRANSMISSION...	84
2.02-3 ETUDE D'UNE COUCHE PRISE EN SANDWICH ENTRE DEUX MILIEUX SEMI-INFINIS.....	86
2.02-3-A IMPÉDANCE RAMENÉE Z_{01}	86
2.02-3-B COEFFICIENTS DE TRANSMISSION ET DE RÉFLEXION	87
2.02-3-C RELATION ENTRÉE-SORTIE	87
2.02-3-D FONCTION DE TRANSFERT.....	88
2.02-4 CAS D'UN MILIEU MULTICOUCHES.....	88
 <u>2.03 PARAMÈTRES LIÉS À LA TRANSDUCTION.....</u>	 <u>91</u>
2.03-1 INTRODUCTION	91
2.03-2 EQUATIONS DE TRANSDUCTION D'UNE COUCHE PIÉZO-ÉLECTRIQUE MINCE.....	92
2.03-3 RELATIONS GÉNÉRALES DE CONVERSION.....	94
2.03-3-A RELATIONS À L'ÉMISSION	94
2.03-3-B RELATION À LA RÉCEPTION	95
2.03-4 EXPRESSION DES GRANDEURS ÉLECTRO-ACOUSTIQUES.....	98

2.03-4-A IMPÉDANCE ÉLECTRIQUE DU TRANSDUCTEUR ÉMETTEUR	98
2.03-4-B COEFFICIENT DE TRANSMISSION ÉLECTRIQUE :	100
2.03-4-C RAPPORT DE CONVERSION ÉLECTRO-ACOUSTIQUE :	101
2.03-4-D IMPÉDANCE ACOUSTIQUE Z_A DU TRANSDUCTEUR RÉCEPTEUR	102
2.03-4-E COEFFICIENT DE RÉFLEXION ACOUSTIQUE SUR LE TRANSDUCTEUR RÉCEPTEUR :	103
2.03-4-F RAPPORT DE CONVERSION ACOUSTO-ÉLECTRIQUE :	103
<u>2.04 EXPRESSION DES PARAMÈTRES S NÉCESSAIRES À LA CARACTÉRISATION.....</u>	<u>104</u>
2.04-1 PARAMÈTRE S_{21} DU SYSTÈME.....	105
2.04-2 PARAMÈTRE S_{11} DU SYSTÈME.....	105
2.04-3 PARAMÈTRE S_{22} DU SYSTÈME.....	106
<u>2.05 ANALYSE DES EXPRESSIONS DES PARAMÈTRES S.....</u>	<u>107</u>
2.05-1 INTERPRÉTATION DES PARAMÈTRES S_{11} ET S_{21}	107
2.05-1-A PARAMÈTRE S_{21}	107
2.05-1-B PARAMÈTRE S_{11}	108
2.05-2 EXISTENCE D'UNE TRANSFORMÉE DE FOURIER INVERSE.....	108
2.05-3 TERMES UTILES DE CHAQUE PARAMÈTRE S	110
<u>2.06 SIMULATION.....</u>	<u>111</u>
2.06-1 IMPÉDANCE ACOUSTIQUE Z_A RAMENÉE SUR LE RÉCEPTEUR	111
2.06-2 IMPÉDANCE RAMENÉE Z_{01}	112
2.06-3 IMPÉDANCE ÉLECTRIQUE Z_{el}	114
2.06-4 PARAMÈTRE S_{11}	115
2.06-5 PARAMÈTRE S_{21}	116
<u>2.07 CONCLUSION</u>	<u>117</u>
<u>CHAPITRE 3. TRAITEMENT DU SIGNAL APPLIQUÉ AUX MESURES DES PARAMÈTRES S.....</u>	<u>118</u>
<u>3.01 INTRODUCTION.....</u>	<u>118</u>
<u>3.02 MÉTHODES IMPULSIONNELLES.....</u>	<u>119</u>
3.02-1 MESURE DE LA CÉLÉRITÉ	119
3.02-2 MESURE DU COEFFICIENT D'ATTÉNUATION.....	121

3.02-2-A CARACTÉRISATION DES TRANSDUCTEURS.....	121
3.02-2-B EVALUATION DU COEFFICIENT D'ATTÉNUATION	122
3.02-3 CONCLUSION	123
<u>3.03 MÉTHODE HARMONIQUE</u>	<u>124</u>
3.03-1 MESURE DES PARAMÈTRES S	124
3.03-2 CARACTÉRISATION DANS LE DOMAINE TEMPOREL	125
3.03-3 CARACTÉRISATION DANS LE DOMAINE FRÉQUENTIEL	126
3.03-3-A CHOIX DES FENÊTRES D'EFFACEMENT.....	127
3.03-3-B CARACTÉRISATION DES TRANSDUCTEURS.....	128
3.03-3-C EGALISATION DES PARAMÈTRES S.....	131
3.03-3-D EXTRACTION DES CARACTÉRISTIQUES DU MILIEU	131
3.03-3-E SCHÉMA SYNOPTIQUE DE LA TECHNIQUE DE TRAITEMENT DU SIGNAL	133
<u>3.04 INTÉRÊT DE LA MÉTHODE HARMONIQUE</u>	<u>134</u>
3.04-1 CAS DE LA CARACTÉRISATION DANS LE DOMAINE TEMPOREL	134
3.04-2 CAS DE LA CARACTÉRISATION D'UN MILIEU DISPERSIF	136
3.04-3 INFLUENCE DU FILTRE D'ENTRÉE BW	137
3.04-4 EVALUATION DE LA PRÉCISION	139
<u>3.05 SIMULATION</u>	<u>141</u>
3.05-1 PARAMÈTRES S	142
3.05-2 COMPOSANTES ÉLECTRIQUES ET ACOUSTIQUES DES PARAMÈTRES S DE RÉFLEXION.....	143
3.05-3 REPRÉSENTATION TEMPORELLE	144
3.05-4 PARAMÈTRES S FILTRÉS.....	145
3.05-5 EGALISATION	146
3.05-6 COEFFICIENT DE RÉFLEXION	149
3.05-7 COEFFICIENT D'ATTÉNUATION	150
3.05-8 CÉLÉRITÉ.....	151
3.05-9 TEST DE ROBUSTESSE	154
3.05-9-A ERREUR SUR LES COEFFICIENTS DE RÉFLEXION ET D'ATTÉNUATION ..	154
3.05-9-B ERREUR SUR LA CÉLÉRITÉ	156
<u>3.06 CONCLUSION</u>	<u>158</u>

CHAPITRE 4. RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX	159
4.01 INTRODUCTION.....	159
4.02 PROCÉDÉ DE FABRICATION DES CÉRAMIQUES POREUSES.....	160
4.03 PROTOCOLE EXPÉRIMENTAL	161
4.03-1 CALIBRAGE DE L'ANALYSEUR DE RÉSEAU	162
4.03-2 RÉGLAGE DU PARALLÉLISME DES TRANSDUCTEURS.....	162
4.03-3 RÉGLAGE DE L'INCIDENCE SUR MILIEU POREUX	162
4.03-4 MESURE DES PARAMÈTRES S	163
4.04 TRAITEMENT DU SIGNAL SUR LES PARAMÈTRES S MESURÉS.....	164
4.04-1 MESURES BRUTES, DOMAINE FRÉQUENTIEL ET TEMPOREL	164
4.04-2 EXTRACTION DES COMPOSANTES ÉLECTRIQUES ET ACOUSTIQUES.....	167
4.04-3 IMPÉDANCE ÉLECTRIQUE DES TRANSDUCTEURS	168
4.04-4 RAPPORT SIGNAL À BRUIT	170
4.04-5 FILTRAGE DES IMPULSIONS UTILES	171
4.04-6 EGALISATION DES SIGNAUX	173
4.05 EXTRACTION DES CARACTÉRISTIQUES DE PROPAGATION DU MILIEU POREUX.....	176
4.05-1 COEFFICIENT DE RÉFLEXION	176
4.05-2 COEFFICIENT D'ATTÉNUATION.....	177
4.05-3 CÉLÉRITÉ.....	179
4.06 CONCATÉNATION DES MESURES À DIFFÉRENTES FRÉQUENCES	182
4.06-1 COEFFICIENTS DE RÉFLEXION.....	182
4.06-2 ATTÉNUATION	183
4.06-3 CÉLÉRITÉ.....	184
4.07 CORRECTION SUR L'ATTÉNUATION	186
4.08 COMPARAISON AUX MODÈLES THÉORIQUES.....	188
4.08-1 MODÈLE DE WATERMAN ET TRUELL.....	188
4.08-2 MODÈLE DE BIOT.....	190
4.09 COMPORTEMENT HAUTE FRÉQUENCE.....	194
4.10 COMPARAISON DE DIFFÉRENTS ÉCHANTILLONS	199

4.10-1 GAMME BASSE FRÉQUENCE.....	199
4.10-1-A COEFFICIENTS DE RÉFLEXIONS.....	199
4.10-1-B ATTÉNUATION.....	200
4.10-1-C CÉLÉRITÉ.....	201
4.10-1-D NORMALISATION PAR LA TAILLE DES PORES.....	202
4.10-2 GAMME HAUTE FRÉQUENCE.....	203
<u>4.11 CONCLUSION</u>	<u>205</u>
 <u>CONCLUSION GÉNÉRALE :</u>	<u>208</u>
 <u>TABLE DES FIGURES :</u>	<u>211</u>
 <u>ANNEXE 1 : TABLEAU DES RELATIONS ENTRE CONSTANTES ÉLASTIQUES</u>	<u>214</u>
<u>ANNEXE 2 : PARAMÈTRE STRUCTUREL ET TORTUOSITÉ</u>	<u>215</u>
<u>ANNEXE 3 : VECTEURS DÉPLACEMENTS.....</u>	<u>219</u>
<u>ANNEXE 4 : MATRICE DE DIFFUSION</u>	<u>220</u>
<u>ANNEXE 5 : TRANSLATION DES VECTEURS DÉPLACEMENTS.....</u>	<u>223</u>
<u>ANNEXE 6 : FORMULATION DE LA DIFFUSION MULTIPLE PAR LA MATRICE MULTICENTRÉE</u>	<u>227</u>
<u>ANNEXE 7 : DÉFINITION DES PARAMÈTRES S</u>	<u>230</u>
<u>ANNEXE 8 : IMPÉDANCE RAMENÉE ET RELATION ENTRÉE-SORTIE DU SYSTÈME ACOUSTIQUE.....</u>	<u>231</u>
<u>ANNEXE 9 : EXPRESSION DES PARAMÈTRES S DU SYSTÈME DE MESURE</u>	<u>232</u>
<u>ANNEXE 10 : SIMULATION DES GRANDEURS INTERVENANT DANS LES PARAMÈTRES S</u>	<u>234</u>
<u>ANNEXE 11 : RÉPONSE DES TRANSDUCTEURS</u>	<u>238</u>
 <u>BIBLIOGRAPHIE :</u>	<u>242</u>
 <u>GLOSSAIRE :</u>	<u>245</u>

INTRODUCTION GENERALE :

Ce travail a été réalisé dans l'équipe Génie Biologique et Médical du département Opto-Acousto-Electronique (OAE) de L'Institut d'Electronique et de Micro-électronique du Nord (IEMN). Il s'insère dans le cadre général de la caractérisation de milieux hétérogènes, avec, comme application dans le domaine du génie biologique et médical, la recherche d'une méthode de caractérisation ultrasonore des tissus osseux.

Cet axe de recherche est devenu un enjeu majeur en matière de santé publique. Les maladies du squelette induisent en effet des coûts cliniques, économiques et humains de plus en plus importants, notamment en raison de l'accroissement, avec l'augmentation de la durée de vie, du risque de fracture ostéoporotique.

L'ostéoporose est une maladie du squelette qui se caractérise par une masse osseuse faible et des anomalies micro-architecturales de l'os, conduisant à une fragilisation osseuse. On estime, en France, le nombre de fractures du seul col du fémur à 48000 en 1990 et à 55000 en 1995. Le coût hospitalier d'une fracture (de l'ordre de 92000 francs en 1990) n'est pas facilement réductible. On projette 150000 fractures en 2050 dont le coût approcherait les 4 milliards d'Euros. Le coût humain de ces fractures du col du fémur est lui aussi extrêmement préoccupant puisqu'on estime à l'heure actuelle que 20 à 30 % des patients décèdent dans l'année qui suit la fracture et que globalement, tout âge confondu, 50 % de ceux qui survivent doivent être institutionnalisés en raison d'une perte d'autonomie trop importante¹.

La technique de mesure de référence en terme de densité osseuse est l'absorptiométrie biphotonique à rayons X. Cette technique ne peut être utilisée à long terme en raison du pouvoir ionisant des rayons X sur les cellules. Il est donc extrêmement difficile de suivre l'évolution de la maladie sur un patient. En outre cette technique ne permet pas d'évaluer la micro structure du milieu dont les caractéristiques sont intimement liées à la fragilité osseuse. Les techniques de mesures ultrasonores apparaissent très prometteuses. Sans risque pour le patient,

¹ Deprez X., '*L'ostéoporose : définition et conséquences cliniques et économiques*', Actes du congrès : Secondes journées d'études sur l'interaction des ultrasons avec les milieux biologiques, publiés par l'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, nov 1998

elles permettent l'évaluation des caractéristiques mécaniques d'un milieu, et sont sensibles à sa micro structure. Il nous a paru intéressant d'effectuer un travail en amont permettant de mieux comprendre les interactions os-ultrasons. Cela passe à notre avis par la mise au point d'un nouveau système de mesure. Destiné à être utilisé in vitro, nous pouvons choisir des conditions expérimentales idéales, conditions généralement incompatibles avec les contraintes rencontrées dans les mesures in vivo.

Le savoir-faire du département OAE de l'ITEMN en matière de caractérisation ultrasonore nous a été d'une grande utilité. Les travaux de M Deblock² sur la caractérisation ultrasonore de liquides viscoélastiques en bande étroite haute fréquence ont retenu toute notre attention. Il utilise une technique originale de mesures basée sur la génération et la détection des ondes acoustiques, en régime harmonique. L'avantage de cette technique est de présenter un rapport signal à bruit beaucoup plus élevé que celui des méthodes plus traditionnelles utilisant des impulsions dont la durée s'étend d'une fraction de période à quelques dizaines de périodes. Les interactions os-ultrasons se complexifient avec l'accroissement de la fréquence. Un système mesurant l'évolution fréquentielle de la transmission ultrasonore nous paraît donc susceptible de mieux faire apparaître cette complexification.

Associé avec le Laboratoire de Matériaux Avancés et de Céramiques (LAMAC), nous avons la possibilité d'obtenir des échantillons de substituts osseux à porosité contrôlée, en terme de concentration, de forme et de taille des pores. Cela constitue une aide considérable dans l'analyse des effets de la micro architecture du milieu sur la propagation acoustique.

Ainsi les savoir-faire de ces deux laboratoires constituent deux atouts pour débiter notre étude.

La connaissance des signaux transmis à travers un milieu aussi complexe qu'un tissu osseux nous renseigne peu sur les interactions s'y étant produit. Il est essentiel de traiter les signaux mesurés sur la base d'hypothèses de propagation des ondes acoustiques dans le matériau. Nous rappelons quelques modèles simplifiés par des choix adéquats d'hypothèses fondatrices.

Notre travail est exposé en quatre chapitres.

Le premier chapitre est essentiellement destiné à l'étude théorique de la propagation ultrasonore dans les milieux hétérogènes. Nous définissons différents types de

² Deblock Y., *'Caractérisation ultrasonore haute fréquence des propriétés viscoélastiques de milieux liquides'*, thèse de doctorat, Valenciennes, juin 1997

milieux poreux et discutons des grandeurs permettant de les caractériser. Nous présentons ensuite quelques modèles qui apportent différents niveaux de compréhension à la propagation d'ultrasons dans les milieux hétérogènes. Nous comparons ces modèles et discutons de leur applicabilité aux milieux poreux.

Le second chapitre constitue le prolongement de la thèse de M.Deblock, nous modélisons le système de mesure. Cette étape est essentielle à la compréhension des signaux mesurés, et nécessaire à l'adaptation du système de caractérisation en bande étroite des milieux liquides à la caractérisation sur une bande de fréquence arbitraire des milieux solides.

La mesure étant effectuée en régime harmonique, nous relevons pour chaque fréquence un état d'ondes stationnaires dans les milieux traversés. Nous présentons dans le troisième chapitre une méthode de traitement du signal permettant d'accéder aux renseignements typiques obtenus par les méthodes impulsionnelles plus communément utilisées.

Le quatrième chapitre est essentiellement dédié à l'aspect expérimental. Nous y présentons le protocole de mesure retenu et testons la méthode sur quelques échantillons. Les mesures sont effectuées sur trois bandes de fréquences conjointes obtenues à l'aide de trois paires de transducteurs. L'étude des raccordements de bandes donne une bonne idée de la reproductibilité des mesures. La grande dynamique de mesure de cette méthode de caractérisation novatrice permet d'isoler un type d'interaction haute fréquence qui ouvre la voie à des perspectives prometteuses.

Chapitre 1. MODELES DE PROPAGATION DANS LES MILIEUX HETEROGENES

1.01 INTRODUCTION

Nous commencerons par définir les notions de milieux homogènes ou hétérogènes et décrirons les types de milieux hétérogènes que nous allons utiliser.

Nous rappellerons comment l'étude de la propagation d'une onde acoustique dans un milieu homogène permet la caractérisation des propriétés mécaniques. Nous exposerons à cette occasion les grandeurs mécaniques qui seront utilisées par la suite.

Nous présenterons ensuite quelques modèles de propagation dans les milieux hétérogènes et discuterons de leurs capacités à décrire le type de milieux poreux que nous utiliserons en pratique.

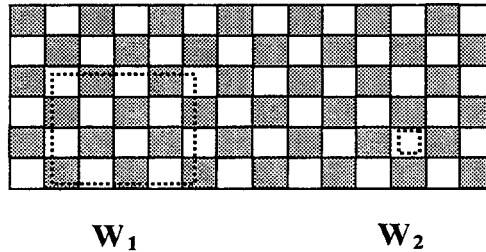
1.02 GENERALITES ET DEFINITIONS

1.02-1 GENERALITES SUR LES MILIEUX HETEROGENES

1.02-1-a NOTIONS D'HOMOGENEITE ET D'HETEROGENEITE

La constitution de la matière, décrite par des atomes ou molécules, est de nature discrète, donc hétérogène. Contrairement à l'idée que l'on peut s'en faire en observant un milieu dit homogène. Les notions d'homogénéité et d'hétérogénéité sont indissociables de l'échelle d'observation. Supposons une fenêtre W dans laquelle nous étudions les propriétés d'un milieu. Si un déplacement de la fenêtre dans le milieu n'apporte pas de nouveaux renseignements sur la propriété étudiée, le milieu est homogène à l'échelle de la fenêtre pour cette propriété. Par exemple sur le schéma

suivant le milieu est homogène à l'échelle de W_1 et hétérogène à l'échelle de W_2 pour une quelconque propriété évaluée en niveau de gris.



Les dimensions de la fenêtre dépendent de la situation physique. Dans le cas de la propagation d'une onde il faut les rattacher à une grandeur caractéristique de la propagation, par exemple la longueur d'onde. Cette description phénoménologique des notions d'homogénéité et d'hétérogénéité est en grande partie déduite des travaux expérimentaux de Mme HoBaTho³.

Notons que dans le langage courant un milieu est dit hétérogène si les hétérogénéités apparaissent à l'œil nu. Afin de concilier les deux terminologies nous qualifierons d'homogénéisé un milieu pour lequel nous pouvons observer des hétérogénéités, mais dont les dimensions sont petites à l'échelle des phénomènes physique s'y produisant. Nous parlerons alors de caractéristiques effectives du milieu.

Notons enfin que des milieux hétérogènes différents peuvent engendrer un même milieu homogénéisé, ce qui rend impossible, sans a priori, la reconstruction du milieu hétérogène à partir de la connaissance de ses caractéristiques effectives.

Il apparaît nettement sur ce schéma que la fenêtre W_1 permettra l'évaluation des caractéristiques effectives alors que la fenêtre W_2 sera plutôt sensible aux caractéristiques microstructurelles.

1.02-1-b MILIEUX HETEROGENES

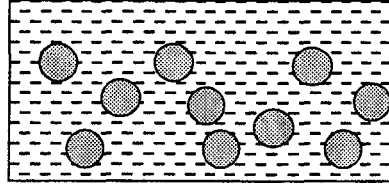
Il existe deux grands types de milieux hétérogènes, les milieux hétérogènes continus pour lesquels les caractéristiques évoluent continûment dans l'espace et les milieux discrets qui sont issus de la juxtaposition d'au moins deux phases. Nous nous intéressons tout particulièrement à ce type de milieux hétérogènes, notamment dans le cas où ils sont constitués de phases solides et fluides.

³ HoBaTho M.C., Rho J.Y, Ashman R.B., '*Anatomical variation of mechanical properties of human cortical and cancellous bone*', Secondes journées d'études sur l'interaction des ultrasons avec les milieux biologiques, publiés par l'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, nov 1998

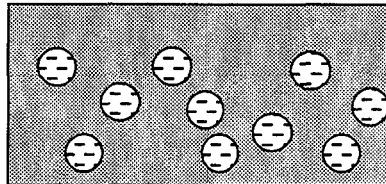
Dans ce dernier cas, nous pouvons envisager deux situations :

➤ Les milieux non connectés de type suspension

- Un milieu matrice fluide dans lequel sont dispersées des inclusions solides.



- Un milieu matrice solide dans lequel sont dispersées des inclusions fluides.

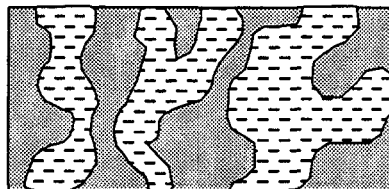


On définit la concentration en inclusion β par le rapport du volume occupé par les inclusions au volume total de l'échantillon.

$$\beta = \frac{V_{\text{inclusion}}}{V_{\text{total}}}$$

➤ Les milieux connectés

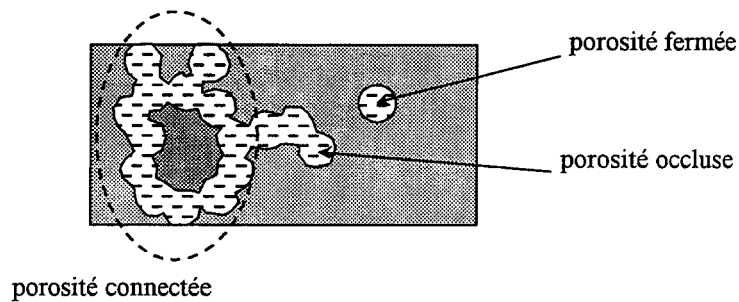
Ces milieux peuvent être issus des deux cas précédents en choisissant une concentration suffisamment importante d'inclusions pour quelles se trouvent en contact. Les deux phases jouent alors un rôle similaire dans la mesure où elles ne sont pas interrompues d'une face à l'autre du milieu.



La concentration β définie comme précédemment s'appelle dans ce cas la porosité du milieu. Elle est aussi égale au rapport des surfaces de fluide et de milieu interceptées par un plan.

$$\beta = \frac{V_{\text{fluide}}}{V_{\text{total}}} = \frac{S_{\text{fluide}}}{S_{\text{total}}}$$

Notons qu'un milieu poreux contient en général plusieurs type de porosité comme nous le faisons apparaître sur le schéma suivant.



Les milieux poreux que nous utiliserons possèdent essentiellement une porosité de type connecté. Nous parlerons de milieux poreux à pores communicants. Nous appellerons fluide saturant ou fluide gorgeant, le fluide contenu dans les pores.

1.02-1-c GRANDEURS DESCRIPTIVES D'UN MILIEU HETEROGENE

Un milieu hétérogène peut être décrit à partir :

- de paramètres physiques : les modules élastiques des éléments le constituant, leurs densités,
- de paramètres géométriques : les concentrations des différents constituants, la taille des inclusions, leurs formes, l'existence ou pas de connections, les diamètres d'interconnections,

Cette description n'est pas facilement accessible par une analyse non destructive.

Notons qu'il n'est souvent nécessaire de ne connaître que les grandeurs utiles à une application spécifique. Cela peut être par exemple :

- dans le cas du suivi de colonisation d'un milieu poreux par des cellules osseuses, les caractéristiques de la phase fluide.
- dans le cas du suivi de la calcification, le diamètre moyen des pores.

Le recours à des méthodes empiriques est fréquent si ces grandeurs ne sont pas facilement accessibles. On cherche alors à corréler les modifications des caractéristiques du milieu avec ses propriétés effectives.

L'intérêt que nous portons à la mesure des caractéristiques mécaniques des milieux nous conduit naturellement à utiliser des ondes acoustiques. Nous commençons par présenter l'étude de la propagation d'ondes acoustiques dans des solides et des fluides homogènes.

1.02-2 GENERALITES SUR LES ONDES ACOUSTIQUES

Une onde acoustique est la propagation d'une perturbation mécanique dans un milieu matériel. Si le milieu est isotrope, les caractéristiques de propagation sont indépendantes de la direction de propagation.

Lorsque à un instant donné, les perturbations sont identiques en tous les points d'un plan, on qualifie l'onde d'onde plane. Ce plan est appelé plan d'onde. L'onde se propage dans une direction perpendiculaire à son plan d'onde si le milieu est isotrope.

Une onde longitudinale est une onde pour laquelle la perturbation a lieu dans la direction de propagation. Pour une onde transversale, la perturbation a lieu dans une direction orthogonale à la direction de propagation.

Une onde est harmonique si l'évolution au cours du temps de la perturbation en un point du milieu est sinusoïdale.

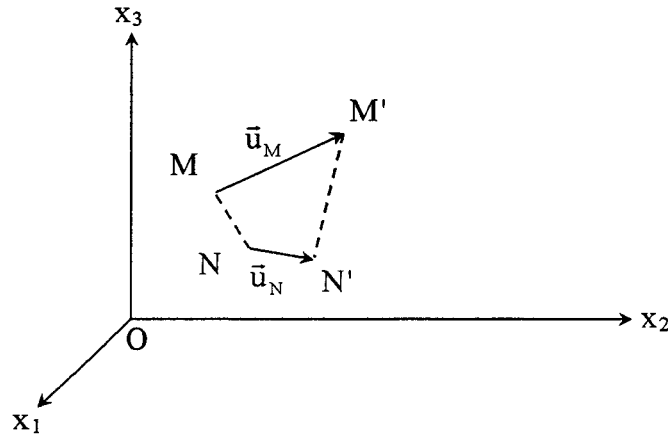
Nous allons définir les grandeurs mécaniques caractéristiques d'un milieu matériel. Nous introduirons ensuite les équations de propagation d'une onde acoustique dans un milieu solide ou fluide. Nous en déduirons les liens existant entre les célérités de ces ondes et les constantes mécaniques des milieux. Cela sera aussi l'occasion de définir des grandeurs que nous réutiliserons dans ce chapitre.

1.02-2-a DEFINITION DES GRANDEURS MECANIKES

1-02-2-a-(1) : DEFORMATION D'UN SOLIDE

Soient deux points M et N d'un solide. Une déformation du solide fait passer ces deux points en M' et N'. Nous définissons les vecteurs déplacements en M et N par

$\bar{u}_M = \overline{MM'}$ et $\bar{u}_N = \overline{NN'}$. Ces vecteurs dépendant de la position, la forme du solide est modifiée.



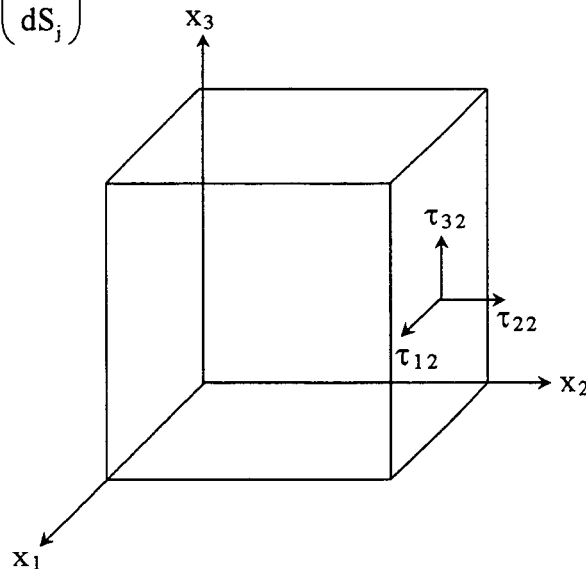
La déformation du solide est représentée par un tenseur $\mathbb{E}$ dont les éléments $\mathbb{E}_{ij}$ sont définis par :

$$\mathbb{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.02-1)$$

u_i est la composante du vecteur $\bar{u}$ dans la direction x_i . La somme $\mathbb{E}_{11} + \mathbb{E}_{22} + \mathbb{E}_{33}$ représente la dilatation du solide, nous la noterons e .

1-02-2-a-(2) : CONTRAINTES APPLIQUEES SUR UN ELEMENT DE VOLUME

Soit un élément de volume dont les normales des faces sont colinéaires aux axes du repère. La force $d\vec{F}_j$ qui s'exerce sur l'élément de surface dS_j de normale x_j peut être décomposée en trois composantes dF_{ij} sur les trois axes du repère. La contrainte τ_{ij} est définie par $\tau_{ij} = \lim_{dS_j \rightarrow \infty} \left(\frac{dF_{ij}}{dS_j} \right)$



1-02-2-a-(3) : LOI DE HOOKE ET CONSTANTES ELASTIQUES

La déformation d'un solide engendre des forces internes de rappel qui tendent à le ramener dans sa position d'équilibre. La loi de Hooke exprime une relation de linéarité entre les contraintes et les déformations.

$$\tau_{ij} = c_{ijkl} \mathbb{E}_{kl} \quad (1.02-2)$$

les coefficients c_{ijkl} représentent la rigidité du milieu.

Dans le cas où le solide est isotrope, l'expression 1.01-2 se réduit à :

$$\tau_{ij} = \lambda e \delta_{ij} + 2 \mu \mathbb{E}_{ij} \quad (1.02-3)$$

Les coefficients λ et μ sont appelés coefficients de Lamé.

Nous pouvons aussi caractériser l'élasticité d'un solide par ses modules d'incompressibilité (K) et de cisaillement (G).

Le module d'incompressibilité K relie la dilatation du solide à la pression hydrostatique qui l'a engendrée. C'est par définition l'inverse du coefficient de compressibilité $\chi = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)$.

Le module de cisaillement est le coefficient de proportionnalité entre la contrainte de cisaillement τ_{ij} et la variation $2 \mathbb{E}_{ij}$ de l'angle entre les directions i et j initialement perpendiculaires.

Le module de cisaillement est égal à la constante μ de Lamé. Le lien entre K, λ et μ est : $K = \lambda + 2/3 \mu$ (annexe 1).

Des frictions internes peuvent se produire au sein d'un milieu homogène soumis à une déformation. Ces frictions induisent un retard de la réponse à une sollicitation du matériau et généralement un dégagement de chaleur. Cela se décrit mathématiquement par des constantes mécaniques complexes.

1.02-2-b EQUATIONS DE PROPAGATION

1-02-2-b-(1) : PROPAGATION D'UNE ONDE PLANE HARMONIQUE DANS UN SOLIDE

Traversé par une perturbation mécanique, le milieu de masse volumique ρ est localement en mouvement. L'équation fondamentale de la dynamique permet

d'obtenir un lien entre les contraintes, causes du mouvement et le déplacement local du milieu.

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (1.02-4)$$

En introduisant le lien 1.01-2 entre les contraintes et les déformations,

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k}$$

qui peut s'exprimer dans le cas d'un milieu isotrope par :

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \overline{\text{grad}}(\text{div} \vec{u}) + \mu \overline{\text{rot}}[\overline{\text{rot}}(\vec{u})] \quad (1.02-5)$$

Il peut être utile de découpler les trois composantes du vecteur déplacement. Le théorème de Helmholtz montre que tout vecteur $\vec{u}$ peut être décomposé par les potentiels scalaire Φ et vecteur $\vec{\Psi}$:

$$\vec{u} = \overline{\text{grad}}(\Phi) + \overline{\text{rot}}(\vec{\Psi}) \quad (1.02-6)$$

Nous obtenons alors les deux équations de propagation :

$$\begin{aligned} \Delta \Phi - \frac{1}{\tilde{v}_L^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= 0 \\ \Delta \vec{\Psi} - \frac{1}{\tilde{v}_T^2} \frac{\partial^2 \vec{\Psi}}{\partial t^2} &= \vec{0} \end{aligned} \quad (1.02-7)$$

qui font apparaître, dans le cas général où les coefficients de Lamé sont des grandeurs complexes, les célérités complexes $\tilde{v}_L = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2}$ et $\tilde{v}_T = \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{1/2}$ des ondes longitudinale et transversales.

Dans le cas d'une onde harmonique de pulsation ω , $\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{u}$ l'équation 1.02-5 prend la forme 1.02-8 appelé équation de Helmholtz :

$$\frac{1}{\tilde{k}_L^2} \overline{\text{grad}}(\text{div} \vec{u}) - \frac{1}{\tilde{k}_T^2} \overline{\text{rot}}[\overline{\text{rot}}(\vec{u})] + \vec{u} = \vec{0} \quad (1.02-8)$$

avec $\tilde{k}_{L/T} = \frac{\omega}{\tilde{v}_{L/T}}$, les nombres d'onde complexes des ondes longitudinales et transversales.

Les vitesses de phase $v_{L/T}$ et les atténuations $\alpha_{L/T}$ se relient à aux vitesses complexes en posant $\frac{1}{\tilde{v}_{L/T}} = \frac{1}{v_{L/T}} - i \frac{\alpha_{L/T}}{\omega}$ et $M = M' + i M'' = \lambda + 2\mu$ pour l'onde longitudinale, ou $M = M' + i M'' = \mu$ pour l'onde transversale. Nous obtenons alors :

$$M' = \rho v_{L/T}^2 \frac{1 - \left(\frac{\alpha_{L/T} v_{L/T}}{\omega} \right)^2}{\left[1 + \left(\frac{\alpha_{L/T} v_{L/T}}{\omega} \right)^2 \right]^2} \quad \text{et} \quad M'' = 2 \rho v_{L/T}^2 \frac{\frac{\alpha_{L/T} v_{L/T}}{\omega}}{\left[1 + \left(\frac{\alpha_{L/T} v_{L/T}}{\omega} \right)^2 \right]^2}$$

1-02-2-b-(2) : PROPAGATION D'UNE ONDE PLANE HARMONIQUE DANS UN FLUIDE

➤ Cas d'un fluide parfait

Un fluide parfait (non visqueux) ne subit pas de contraintes de cisaillement. Il ne suffit par conséquent que d'une constante élastique pour le caractériser :

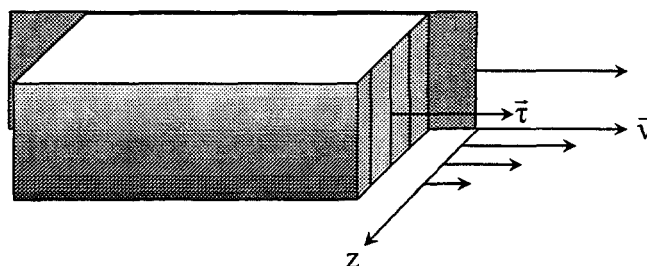
$$\lambda = K = \frac{1}{\chi}, \quad \mu = G = 0$$

Il ne peut se propager dans un tel fluide qu'une onde longitudinale de célérité $\tilde{v}_L = \left(\frac{K}{\rho} \right)^{1/2}$. L'amplitude de cette onde décroît exponentiellement au cours de sa propagation.

➤ Cas d'un fluide visqueux

Dans le cas où le fluide est visqueux, le déplacement d'un plan parallèlement à lui même induit une contrainte de cisaillement.

Nous supposons que le fluide est Newtonien, c'est à dire que la contrainte de cisaillement varie linéairement avec le gradient de vitesse tangentiel. Le coefficient de proportionnalité η définit la viscosité du fluide.



$v = \frac{\partial u}{\partial t}$ est la vitesse de déplacement particulière.

Le fluide admet alors deux coefficients élastiques, K (ou λ) complexes et $G (= \mu) = i\omega\eta$.

L'équation de propagation est donc établie comme pour un solide et fait apparaître deux types ondes s'atténuant au cours de leur propagation, l'une longitudinale et l'autre transversale.

1-02-2-b-(3) : IMPEDANCE

L'impédance acoustique est une grandeur extrêmement utilisée. Elle traduit la linéarité existant entre la contrainte et la vitesse de déplacement particulière en un point du milieu :

$$Z = -\frac{\tau}{v} \quad (1.02-9)$$

Elle dépend donc de la situation physique, nature de l'onde, position du point.

Dans le cas particulier d'une onde plane se propageant dans un milieu illimité, homogène et isotrope, l'impédance est la même en tout point et ne dépend que des caractéristiques mécaniques du milieu. On l'appelle impédance caractéristique.

Soit donc un milieu illimité, homogène et isotrope, caractérisé par sa masse volumique ρ et ses constantes de Lamé λ et μ .

Une onde longitudinale plane de pulsation ω s'y propage vers les x croissants, avec une célérité complexe $\tilde{v}_L$.

Le déplacement en un point d'abscisse x , solution de l'équation 1.01-8, s'exprime par

$$u_1 = u_{01} e^{i(\omega t - \tilde{k}_L x)}, \text{ avec } \tilde{k}_L = \frac{\omega}{\tilde{v}_L}$$

La loi de Hooke relie la contrainte au déplacement, soit dans la direction x , $\tau_{11} = -i \tilde{k}_L (\lambda + 2\mu) u_1$.

La dérivée du déplacement par rapport au temps nous fournit la vitesse de déplacement particulière, $v_1 = i \omega u_1$.

Soit pour l'impédance caractéristique de compression :

$$Z_L = -\frac{\tau_{11}}{v_1} = \frac{\tilde{k}_L}{\omega} (\lambda + 2\mu) = \rho \tilde{v}_L$$

La même méthode est appliquée avec une onde transversale et conduit à une expression semblable pour l'impédance caractéristique de cisaillement. Ainsi :

$$\tilde{Z}_{L/T} = \rho \tilde{v}_{L/T}$$

Les parties réelles R et imaginaires X de cette impédance complexe sont liées aux parties réelles et imaginaires des constantes élastiques. Le lien existant entre $\tilde{Z}_{L/T}$ et M définit comme précédemment s'exprime par :

$$M' = \frac{R^2 - X^2}{\rho} \quad \text{et} \quad M'' = \frac{2 R X}{\rho}$$

Le retard existant entre sollicitations et réponses du milieu s'exprime facilement en fonction des module et phase de l'impédance caractéristique :

$$\frac{\tau}{v} = -|Z| e^{i \arctan(X/R)}$$

1-02-2-b-(4) : CONCLUSION

L'intérêt évident de la caractérisation acoustique apparaît dans ces équations puisque la mesure des célérités et des atténuations des ondes longitudinale et transversale se propageant dans le milieu homogène permet de connaître ses constantes élastiques.

Nous sommes naturellement amenés à se poser la question suivante :

Qu'en est-il des milieux hétérogènes ?

Quelles grandeurs caractéristiques des milieux hétérogènes peut-on espérer mesurer ?

Les réponses à ces questions ne peuvent se passer de l'étude de la propagation d'une onde ultrasonore dans un milieu hétérogène. C'est l'objet des paragraphes suivants dans lesquels nous présenterons différents modèles de propagation dans les milieux hétérogènes

Ces modèles mettent en avant les grandeurs caractéristiques des milieux hétérogènes qui interviennent dans la propagation d'ondes ultrasonores et répondent partiellement à la question posée.

Ils sont en outre indispensables à la recherche d'une technique de traitement du signal permettant d'extraire les caractéristiques des matériaux des paramètres de propagation.

1.03 DEMARCHE SUIVIE

L'étude complète de la propagation d'ondes dans les milieux hétérogènes reste un défi pour les physiciens. Seuls quelques cas particuliers peuvent être correctement traités.

Nous nous sommes donnés comme application concrète l'étude d'une céramique de substitution osseuse qui est un milieu poreux à pores communicants construit à partir d'une suspension de forte concentration d'éléments sphériques. Il nous a donc paru intéressant d'utiliser deux types de modèles en vue d'une meilleure compréhension des phénomènes de propagation.

✓ Le modèle semi-phénoménologique de Biot, qui s'impose de fait puisque conçu pour décrire la propagation d'ondes acoustiques dans les milieux poreux à pores communicants. Il ne peut cependant s'appliquer que dans le cas où la longueur d'onde est grande devant la taille des pores. Le milieu est donc homogénéisé par la longueur d'onde. Il permet l'évaluation des caractéristiques effectives du milieu

Nous présenterons ce modèle et discuterons de son applicabilité. Nous citerons quelques travaux expérimentaux portant sur les milieux poreux en relation avec le modèle de Biot. Nous présenterons des simulations basées sur ce modèle afin de déterminer l'influence des différentes constantes qu'il fait apparaître, puis une simulation de la propagation à travers le milieu que nous étudierons expérimentalement. Cela nous permettra d'en prédire quelques informations qui seront utilisées dans la partie expérimentale.

Ce modèle est limité à la description de la propagation d'ondes de basse fréquence. Les échantillons que nous possédons sont de faibles dimensions, ce qui rend difficile les mesures en basse fréquence. Nous tentons alors de décrire la propagation d'ondes de plus hautes fréquences par les modèles de diffusion multiple.

✓ Les modèles de diffusions multiples, qui s'appliquent à des milieux de type suspensions, matrices homogènes contenant des hétérogénéités disjointes.

En régime haute fréquence la longueur d'onde est faible devant la taille des hétérogénéités. Le mécanisme de propagation doit alors être étudié à l'échelle microscopique. Les modèles de diffusion multiple décrivent la propagation en termes d'interférences entre toutes les ondes diffusées par toutes les hétérogénéités. La formulation de l'équation fondamentale de la diffusion multiple ne nécessite pas

l'introduction d'hypothèses restrictives sur la fréquence comme cela est le cas pour le modèle de Biot.

Certains modèles de diffusion multiple homogénéisent le milieu par le calcul d'une onde moyenne, appelée onde cohérente. Son équation de dispersion met en évidence la possibilité de caractériser la taille des inclusions si la mesure est effectuée sur une gamme de fréquence suffisamment large.

Nous tenterons de représenter le milieu poreux à pores communicants gorgés d'eau comme le cas limite d'une suspension de concentration suffisamment importante pour que les hétérogénéités se trouvent en contact. Les hétérogénéités sont constituées dans ce cas, de sphères d'eau.

Ces deux types de modèles étant susceptibles de décrire la propagation dans un même milieu, la tentation de les unifier est grande. Cependant, la propagation d'une onde acoustique dans un milieu poreux à pores communicants n'est pas pour autant complètement décrite par les modèles de diffusion multiple. S'il est théoriquement possible de résoudre les équations de continuités à la surface d'hétérogénéités disjointes, il n'en est pas de même pour des hétérogénéités assemblées. Cette difficulté réside dans la complexité de la surface commune aux hétérogénéités. L'équation fondamentale de la diffusion multiple ne décrit donc que partiellement la propagation dans un milieu poreux à pores communicants. Elle ne peut prendre en compte les effets des interconnexions entre pores, et par conséquent ne peut décrire une propagation susceptible de s'effectuer conjointement dans les deux phases comme le fait le modèle de Biot en basse fréquence.

Dans l'état actuel des savoirs, les principaux écueils de ces deux pistes peuvent se résumer par le tableau suivant :

Possibilité d'une :	Modèle de Biot	Eq. fondamentale de la diffusion multiple
• description haute fréquence	NON	OUI
• prise en compte des interconnexions	OUI	NON

Ainsi il n'existe à notre connaissance aucun modèle susceptible de décrire correctement la propagation dans les milieux poreux à pores communicants dans la gamme de fréquence où la longueur d'onde est inférieure ou comparable à la taille des pores.

Nous tenterons de faire apparaître progressivement les difficultés inhérentes à l'étude de la propagation dans les milieux hétérogènes en haute fréquence.

Nous rappellerons comment calculer l'onde diffusée par une seule hétérogénéité sphérique.

Le cas d'un grand nombre d'hétérogénéités sera ensuite présenté. L'évaluation de l'onde diffusée ne pourra cependant pas être menée à terme en raison de la complexité de calculs que cela engendre.

Le cas de la diffusion par deux sphères disjointes peut être interprété dans le cadre de la théorie géométrique de la diffraction où les ondes diffusées sont analysées en termes de rayons acoustiques. L'intérêt que nous porterons à cette approche réside essentiellement dans son contenu descriptif.

Nous introduirons le traitement statistique des ondes diffusées dans la théorie de la diffusion multiple.

Nous présenterons des simulations basées sur le type de milieux que nous utiliserons dans la partie expérimentale. Cela nous permettra de confronter un modèle de diffusion multiple aux résultats expérimentaux. Nous présenterons à cette occasion une piste originale susceptible de permettre une description de la propagation dans les deux phases. Cela pourra constituer une première approche dans l'unification du modèle de Biot avec les modèles de diffusion multiple.

1.04 MODELE DE BIOT

Dans les années 1950, Biot⁴ a élaboré une théorie semi-phénoménologique de la propagation d'ondes élastiques dans les milieux poreux à pores communicants en vue d'une application dans la prospection pétrolière. Ce modèle peut s'avérer très représentatif dans la mesure où il est possible d'y intégrer la totalité des phénomènes physiques pouvant intervenir dans la dynamique du champ acoustique⁵. Il se limite par contre au cas où la longueur d'onde est très grande devant la taille des pores.

Notons que pour le type de milieux poreux que nous utiliserons en pratique, une céramique poreuse gorgée d'eau dont le diamètre des pores est de l'ordre de 300 μ m, l'utilisation du modèle de Biot se restreint aux fréquences f très inférieures à dix méga Hertz.

Ce modèle est établi dans le formalisme de Lagrange et repose donc sur des considérations énergétiques. Le Lagrangien du milieu poreux est par construction une fonction quadratique des déformations et des vitesses particulières des deux phases liées par des constantes phénoménologiques élastiques notées P , Q , R et N , inertielles notées ρ_{11} , ρ_{12} et ρ_{22} , et dissipative, notée b .

Nous montrerons comment ces constantes apparaissent dans les énergies. Nous présenterons ensuite les équations de propagation des ondes élastiques. Il sera nécessaire d'explicitier les constantes phénoménologiques avant de rechercher les solutions des équations de propagations. Nous tenterons de comprendre les dépendances des caractéristiques de propagation à ces constantes par des simulations.

⁴ Biot M.A., 'Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid. 1 Low frequency range, 2 Higher frequency range' JASA, vol 28, n°2, pp 168-178, pp 179-191, march 1956

⁵ Depollier C., 'Théorie de Biot et prédiction des propriétés acoustiques des matériaux poreux. Propagation dans les milieux acoustiques désordonnés'
Thèse d'état, Université du Maine, 13 janvier 1989, chap 2, p 28

1.04-1 EQUATIONS DE PROPAGATIONS

1.04-1-a RELATIONS CONTRAINTES DEPLACEMENT

Biot obtient les relations contraintes-déformations pour les phases solide et fluide à partir de l'expression de l'énergie potentielle de déformation du milieu poreux.

Il réduit le nombre des constantes élastiques obtenues en supposant que le milieu poreux est statistiquement isotrope.

$$\begin{aligned}\tau_{ij}^s &= \left[(P - 2N) \operatorname{div} \bar{u}^s + Q \operatorname{div} \bar{u}^f \right] \delta_{ij} + 2 N \mathbb{E}_{ij}^s \\ \tau_{ij}^f &= -\beta P_f \delta_{ij} + (Q \operatorname{div} \bar{u}^s + R \operatorname{div} \bar{u}^f) \delta_{ij}\end{aligned}\tag{1.04-1}$$

avec

- τ_{ij}^s et τ_{ij}^f , les contraintes appliquées aux phases solide ou fluides
- $\bar{u}^s, \bar{u}^f$, vecteurs déplacement des phases solide et fluide
- $\mathbb{E}_{ij}^s$, la déformation de la phase solide
- β , la porosité
- P_f , pression de la phase fluide

Les constantes P , Q , N et R sont des constantes élastiques généralisées. En se reportant à l'équation (1.02-3) nous pouvons établir la correspondance avec les constantes de Lamé :

$$P - 2N \equiv \lambda$$

$$N \equiv \mu$$

$$R \equiv K$$

Q apparaît comme une constante élastique de couplage entre les phases solide et fluide.

1.04-1-b ENERGIE DISSIPÉE

Le fluide saturant étant visqueux, le déplacement d'une des deux phases par rapport à l'autre introduit des dissipations. L'énergie dissipée est proportionnelle au carré de la norme de la vitesse relative.

$$E_d = \frac{1}{2} b \left[(v_x^s - v_x^f)^2 + (v_y^s - v_y^f)^2 + (v_z^s - v_z^f)^2 \right]$$

1.04-1-c ENERGIE CINÉTIQUE

L'énergie cinétique est une fonction quadratique des vitesses particulières des deux phases.

$$E_c = \frac{1}{2} \left[\rho_{11} (v_x^{s^2} + v_y^{s^2} + v_z^{s^2}) + \rho_{12} (v_x^s v_x^f + v_y^s v_y^f + v_z^s v_z^f) + \rho_{22} (v_x^{f^2} + v_y^{f^2} + v_z^{f^2}) \right]$$

1.04-1-d EQUATIONS DE PROPAGATION

L'application des lois de Lagrange conduit aux équations dynamiques.

$$\begin{aligned} N \Delta \bar{u}^s + \overline{\text{grad}} \left[(P - N) \text{div} \bar{u}^s + Q \text{div} \bar{u}^f \right] &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} \bar{u}^s + \rho_{12} \bar{u}^f) + b \frac{\partial}{\partial t} (\bar{u}^s - \bar{u}^f) \\ \overline{\text{grad}} \left[Q \text{div} \bar{u}^s + R \text{div} \bar{u}^f \right] &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{12} \bar{u}^s + \rho_{22} \bar{u}^f) - b \frac{\partial}{\partial t} (\bar{u}^s - \bar{u}^f) \end{aligned} \quad (1.04-2)$$

Le solide étant statistiquement isotrope les ondes longitudinales et transversales ne sont pas couplées. La séparation des deux types d'ondes est réalisée à partir du théorème de Helmholtz (1.02-6).

1-04-1-d-(1) : ONDE LONGITUDINALE :

En calculant la divergence de l'équation de propagation 1.04-2, Biot obtient :

$$\begin{cases} \Delta(Pe^s + Qe^f) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{11}e^s + \rho_{12}e^f) + b \frac{\partial}{\partial t}(e^s - e^f) \\ \Delta(Qe^s + Re^f) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{12}e^s + \rho_{22}e^f) - b \frac{\partial}{\partial t}(e^s - e^f) \end{cases} \quad (1.04-3)$$

- $e^s = \text{div}(\bar{u}^s)$ et $e^f = \text{div}(\bar{u}^f)$ sont les dilation des phases solide et fluide

1-04-1-d-(2) : ONDE TRANSVERSALE

En calculant le rotationnel de l'équation de propagation 1.04-2, Biot obtient :

$$\begin{cases} N \Delta \bar{\Omega}^s = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{11}\bar{\Omega}^s + \rho_{12}\bar{\Omega}^f) + b \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\Omega}^s - \bar{\Omega}^f) \\ \bar{0} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{12}\bar{\Omega}^s + \rho_{22}\bar{\Omega}^f) - b \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\Omega}^s - \bar{\Omega}^f) \end{cases} \quad (1.04-4)$$

- $\bar{\Omega}^s = \overline{\text{rot}}(\bar{u}^s)$ et $\bar{\Omega}^f = \overline{\text{rot}}(\bar{u}^f)$

1.04-2 INTERPRETATION DES CONSTANTES PHENOMENOLOGIQUES

1.04-2-a CONSTANTES ELASTIQUES GENERALISEES

Les constantes élastiques généralisées P, Q et R peuvent être interprétées par des 'expériences pensées' par Biot et Willis, et rattachées aux constantes élastiques des deux phases.

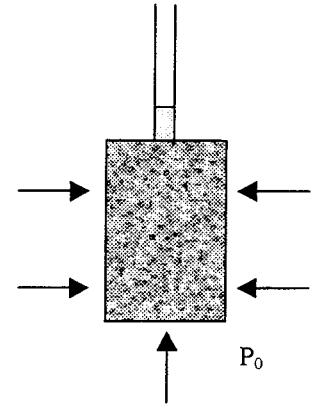
- ✓ Soumis à une contrainte de cisaillement le milieu poreux ne subit pas de variation de volume ($e = \text{div}(\vec{u}) = 0$). La constante N apparaît alors comme le module de cisaillement du milieu poreux que nous noterons G_m .

$$N = G_m$$

- ✓ Une déformation du matériau poreux sous la pression P_0 et à pression du fluide saturant constante vérifie :

$$\tau^s = \left(P - \frac{4}{3} G_m \right) e^s + Q e^f = -P_0$$

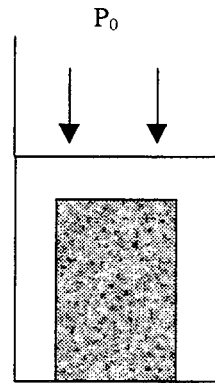
$$\tau^f = R e^f + Q e^s = 0$$



- ✓ Lorsque le milieu poreux est soumis à la pression hydrostatique P_0 , les relations contraintes déplacement des phases fluide et solide vérifient :

$$\tau^s = \left(P - \frac{4}{3} G_m \right) e^s + Q e^f = -(1-\beta) P_0$$

$$\tau^f = R e^f + Q e^s = -\beta P_0$$



En reliant les dilatations du milieu poreux aux contraintes qui les ont créés, Biot et Willis⁶ tirent les constantes élastiques généralisées du milieu poreux :

⁶ Biot M.A., Willis D.G., 'The elastic coefficients of the theorie of consolidation', journ. Appl. Mech. p 594-602, dec 1957

$$P = \frac{(1-\beta) \left(1 - \beta - \frac{K_m}{K_s} \right) K_s + \beta \frac{K_m}{K_f} K_s}{1 - \beta - \frac{K_m}{K_s} + \beta \frac{K_s}{K_f}} + \frac{4}{3} G_m \quad (1.04-5)$$

$$Q = \frac{\left(1 - \beta - \frac{K_m}{K_s} \right) \beta K_s}{1 - \beta - \frac{K_m}{K_s} + \beta \frac{K_s}{K_f}} \quad (1.04-6)$$

$$R = \frac{\beta^2 K_s}{1 - \beta - \frac{K_m}{K_s} + \beta \frac{K_s}{K_f}} \quad (1.04-7)$$

où :

- G_s et K_s représentent les modules de cisaillement et d'incompressibilité de la phase solide
- G_f et K_f , de la phase fluide
- G_m et K_m , du milieu poreux.

1.04-2-b DETERMINATION DES MODULES ELASTIQUES DU MILIEU POREUX

La connaissance des constantes phénoménologiques de Biot nécessite celle des modules de cisaillement et d'incompressibilité statique G_m et K_m du milieu poreux. Hashin et Shtrikman⁷ en donnent les bornes inférieures G_1 , K_1 et supérieures G_2 , K_2 . D'autres modèles permettent d'évaluer les modules élastiques du milieu poreux⁸. Nous nous contenterons cependant de la seule connaissance des bornes inférieure et supérieure, afin d'évaluer la cohérence entre les modèle de Biot et de diffusion multiple.

⁷ Hashin Z., Shtrikman S., 'A variational approach to the theory of elastic behaviour of multiphase materials', J.Mech.Phys.Solids, vol 11, p 127-140, 1963

⁸ Description de ces modèles dans :

Boumiz A., 'Etude comparée des évolutions mécaniques et chimiques des pâtes de ciment et mortiers à très jeune age, développement des techniques acoustiques', Thèse de doctorat, pp66-70, Université Paris VII, déc 1995

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{K_1 + \frac{4}{3}G_s} - \frac{\beta}{K_f + \frac{4}{3}G_s} - \frac{1-\beta}{K_s + \frac{4}{3}G_s} = 0 \\ \frac{1}{G_1 + F_s} - \frac{\beta}{G_f + F_s} - \frac{1-\beta}{G_s + F_s} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{K_2 + \frac{4}{3}G_f} - \frac{\beta}{K_f + \frac{4}{3}G_f} - \frac{1-\beta}{K_s + \frac{4}{3}G_f} = 0 \\ \frac{1}{G_2 + F_f} - \frac{\beta}{G_f + F_f} - \frac{1-\beta}{G_s + F_f} = 0 \end{array} \right.$$

$$F_s = \frac{G_s (9K_s + 8G_s)}{6(K_s + 2G_s)} \quad F_f = \frac{G_f (9K_f + 8G_f)}{6(K_f + 2G_f)} \quad (1.04-8)$$

1.04-2-c COUPLAGE INERTIEL

ρ_{11} et ρ_{22} apparaissent comme les densités apparentes des phases solides et fluides, ρ_{12} comme un terme de masse ajoutée résultant de l'entraînement par inertie d'une des deux phases lors du déplacement de l'autre.

$$\begin{aligned} \rho_{11} + \rho_{12} &= (1-\beta)\rho_s \\ \rho_{12} + \rho_{22} &= \beta\rho_f \\ \rho_{12} &= -(\zeta-1)\beta\rho_f \end{aligned} \quad (1.04-9)$$

avec :

- ρ_s , densité de la phase solide
- ρ_f , densité de la phase fluide
- ζ , la tortuosité, qui représente le rapport de la longueur curviligne parcouru dans le fluide pour rejoindre deux points du fluide à la distance entre les deux points. Berryman en propose une expression :

$\zeta = 1 + r \frac{1-\beta}{\beta}$, r dépend de la géométrie des pores et vaut 0,5 pour des inclusions sphériques.

1.04-2-d COUPLAGE VISQUEUX

La viscosité du fluide saturant gouverne le mouvement relatif entre les deux phases tout en induisant une dissipation d'énergie.

La portée de la force de couplage entre les deux phases décroît avec la fréquence. On introduit l'épaisseur de peau visqueuse $\delta_v = \sqrt{2 \frac{\eta}{\rho_f \omega}}$ afin de quantifier cette décroissance.

Biot introduit une fréquence limite f_v pour laquelle l'épaisseur de peau visqueuse est égale à la taille des pores. Dans le cas des milieux poreux que nous utiliserons expérimentalement, cette fréquence se situe aux environs de quelques centaines de Hertz.

Cette fréquence délimite deux régimes de propagation :

✓ $f < f_v$

Le couplage entre les deux phases est essentiellement un couplage inertiel. Dans ce cas l'épaisseur de peau visqueuse est grande devant la taille des pores, les phases fluide et solide vibrent en phase, le milieu poreux est homogénéisé par la viscosité du fluide saturant. Biot met donc en évidence des régimes de propagations 'classiques' pour un milieu solide homogène : une onde longitudinale et une onde transversale.

Il peut se mettre sous la forme : $b = \frac{\eta \beta^2}{p_{\text{erm}}}$

où p_{erm} représente la perméabilité du milieu poreux, définie par la loi de Darcy qui décrit l'écoulement d'un fluide à travers une matrice poreuse.

$$v_{\text{filtration}} = \frac{p_{\text{erm}}}{\eta} \overline{\text{grad}}(P)$$

Cette loi empirique est déduite d'une étude comportementale simple :

La vitesse de filtration $v_{\text{filtration}}$ du fluide soumis à la pression motrice P est d'autant plus grande que la perméabilité p_{erm} de la matrice est grande et que la viscosité η du fluide faible.

Nous ne nous intéresserons pas plus à cette gamme de fréquence se trouvant bien au-dessous des fréquences utilisables pour la caractérisation par la méthode que nous présenterons.

✓ $f > f_v$

Le couplage est essentiellement visqueux. Les mouvements des phases fluides et solides, couplés par la viscosité du fluide saturant ne s'effectuent généralement pas en phase.

Biot⁹ propose de remplacer la viscosité η par la viscosité dynamique $\eta F(\kappa)$, tout en gardant le coefficient b obtenu en basse fréquence :

$$F(\kappa) = \frac{1}{4} \frac{\kappa T(\kappa)}{1 - \frac{2}{i\kappa} T(\kappa)} \quad \text{et} \quad T(\kappa) = \frac{\text{ber}'(\kappa) + i \text{bei}'(\kappa)}{\text{ber}(\kappa) + i \text{bei}(\kappa)}$$

où :

- κ est une grandeur sans dimension dépendant de la viscosité du fluide gorgeant, de la taille et de la forme des pores (annexe 2).
- les fonctions ber et bei sont les parties réelle et imaginaire de la fonction de Kelvin $\text{ber}(\kappa) + i \text{bei}(\kappa) = J_0\left(i^{3/2} \kappa\right)$. J_0 est la fonction, de Bessel d'ordre 0.
- ber' et bei' , les parties réelle et imaginaire de la dérivée de la fonction de Kelvin. On peut les calculer par :

$$\int_0^\kappa J_0\left(i^{3/2} x\right) x \, dx = -i\kappa \left[\text{ber}'(\kappa) + i \text{bei}'(\kappa) \right]$$

⁹ Biot M.A., 'Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid. 2 Higher frequency range', J.Acoust.Soc.Am, vol 28, n°2, pp 179-191, march 1956

1.04-3 SOLUTIONS DES EQUATIONS DE PROPAGATION

1.04-3-a ONDE LONGITUDINALE

Biot cherche une solution harmonique plane à l'équation 1.04-3 de propagation des ondes longitudinales :

$$\begin{cases} \Delta(Pe^s + Qe^f) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{11}e^s + \rho_{12}e^f) + bF(\kappa)\frac{\partial}{\partial t}(e^s - e^f) \\ \Delta(Qe^s + Re^f) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{12}e^s + \rho_{22}e^f) - bF(\kappa)\frac{\partial}{\partial t}(e^s - e^f) \end{cases}$$

Il normalise ces équations en introduisant les variables :

$$\sigma_{11} = \frac{P}{H}, \sigma_{22} = \frac{R}{H}, \sigma_{12} = \frac{Q}{H}, \text{ avec } H = P + R + 2Q$$

$$\gamma_{11} = \frac{\rho_{11}}{\rho}, \gamma_{22} = \frac{\rho_{22}}{\rho}, \gamma_{12} = \frac{\rho_{12}}{\rho}, \text{ avec } \rho = \rho_{11} + \rho_{22} + 2\rho_{12} = \rho_1 + \rho_2 = \beta\rho_f + (1-\beta)\rho_s$$

$$\text{et } z = \frac{V_c^2}{v_L^2}$$

où

- V_c représente la vitesse de phase en l'absence de mouvement relatif d'une des deux phases par rapport à l'autre, $V_c = \sqrt{\frac{H}{\rho}}$
- v_L la vitesse de phases complexe de l'onde longitudinale.

Etudiant différentes géométries de pores, Biot¹⁰ introduit la fréquence caractéristique $f_c = \frac{b}{2\pi\rho_2} = \frac{b}{2\pi\rho(\gamma_{12} + \gamma_{22})}$, et remarque que $\kappa^2 = \delta^2 \frac{f}{f_c}$, où δ^2 varie de $\frac{16}{3}$ à 12 pour

différentes orientations des pores et pour des pores cylindriques ou infiniment allongés. δ apparaît donc comme un facteur décrivant la microstructure du milieu poreux. Nous l'appellerons le paramètre structurel (annexe 2).

ainsi, l'équation 1.04-3 prend la forme :

$$(\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2)z^2 - (\sigma_{11}\gamma_{22} + \sigma_{22}\gamma_{11} - 2\sigma_{12}\gamma_{12})z + (\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2) + i(\gamma_{12} + \gamma_{22})\frac{f_c}{f}F(\kappa)(z-1) = 0$$

(1.04-10)

¹⁰ Biot M.A., 'theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid. 2 higher frequency range', J.Acoust.Soc.Am., vol 28, n°2, pp179-191, march 1956

Elle admet deux solutions dont les expressions littérales n'ont pas d'intérêt particulier. Ces deux solutions correspondent à deux types d'ondes longitudinales se propageant avec des célérités proches de celles de la phase fluide et de celle de la phase solide. Nous les appellerons ondes lentes et rapides et noterons dorénavant v_l et v_r les vitesses de phases de ces ondes longitudinales lentes et rapides.

1.04-3-b ONDE TRANSVERSALE

L'étude de la propagation des ondes transversales est menée de façon similaire à partir de l'équation 1.04-4 de propagation des ondes transversales :

$$\begin{cases} N\Delta\bar{\omega} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{11}\bar{\omega} + \rho_{12}\bar{\Omega}) + bF(\kappa)\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\omega} - \bar{\Omega}) \\ \bar{0} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{12}\bar{\omega} + \rho_{22}\bar{\Omega}) - bF(\kappa)\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\omega} - \bar{\Omega}) \end{cases}$$

En introduisant les mêmes grandeurs normalisées et la vitesse $V_R = \sqrt{\frac{N}{\rho}}$, pour laquelle il n'y a pas de mouvement relatif entre les deux phases, on obtient :

$$\left(\frac{V_R}{v_l}\right)^2 = \frac{(\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2) - i\frac{f_c}{f}(\gamma_{12} + \gamma_{22})}{\gamma_{22} - i\frac{f_c}{f}(\gamma_{12} + \gamma_{22})} \quad (1.04-11)$$

Il ne se propage qu'une seule onde transversale dans le milieu.

1.04-4 INFLUENCE DES DIVERS PARAMETRES

Nous donnons les courbes de vitesses et l'atténuation en fonction de la fréquence normalisée f/f_c . Nous recherchons donc les solutions de l'équation 1.04-10 et calculons l'expression 1.04-11 pour différentes valeurs des paramètres σ_{ij} , γ_{ij} et δ .

Les vitesses de phases et les coefficients d'atténuation ne sont pas accessibles si on ne choisit pas les caractéristiques du milieu fournissant les valeurs des vitesses V_C et V_R . Désirant traiter l'influence des divers paramètres intervenant dans le modèle de Biot dans le cas le plus général nous présenterons dans cette partie les vitesses de phases normalisées et les coefficients d'atténuations par longueur d'ondes.

La vitesse de phase normalisée des ondes longitudinales lente ou rapide est donnée par $\hat{v}_{l/r} = \frac{1}{\Re(z^{\frac{1}{2}})}$, les coefficients d'atténuation par longueur d'onde sont définis par

$$apc_{l/r} = 2\pi \left| \frac{\Im(z^{\frac{1}{2}})}{\Re(z^{\frac{1}{2}})} \right|.$$

De même pour les ondes transversales :

$$\hat{v}_t = \frac{1}{\Re\left(\frac{V_R}{V_t}\right)} \text{ et } apc_t = 2\pi \left| \frac{\Im\left(\frac{V_R}{V_t}\right)}{\Re\left(\frac{V_R}{V_t}\right)} \right|$$

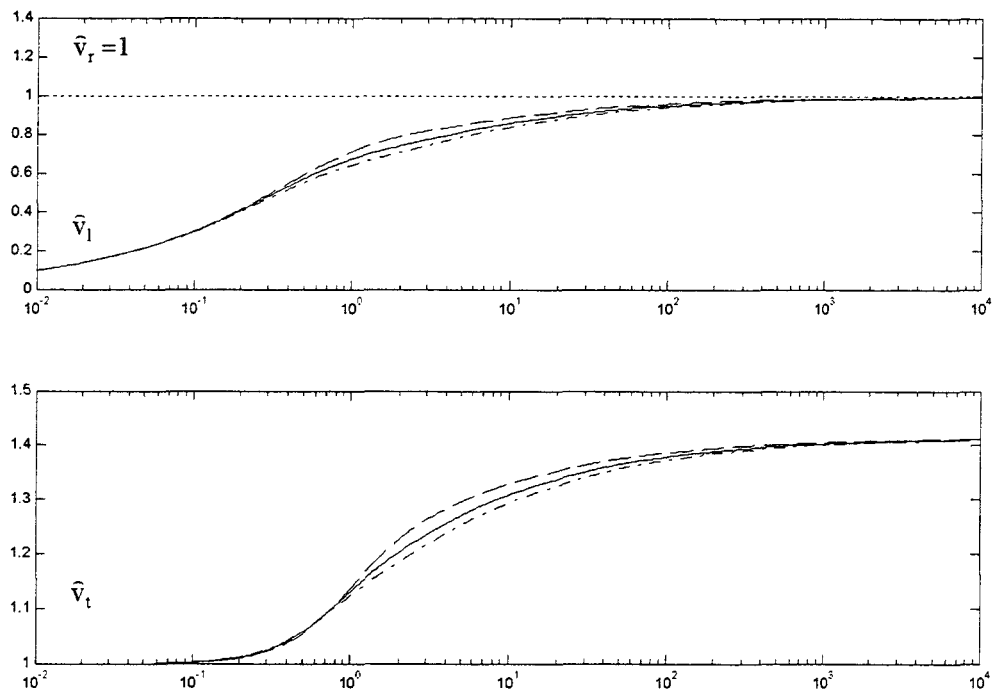
1.04-4-a EN ABSENCE DE COUPLAGE

Pour $\sigma_{11}=0,5$, $\sigma_{22}=0,5$, $\sigma_{12}=0$, $\gamma_{11}=0,5$, $\gamma_{22}=0,5$, $\gamma_{12}=0$.

✓ Influence du paramètre structurel δ

Nous calculons les célérités et atténuations des ondes longitudinales lentes et rapides et des ondes transversales pour trois valeurs du paramètre structurel.

Figure 1-1 : influence du paramètre structural sur les célérités



Vitesses normalisées des ondes

longitudinales rapides (-----)

longitudinales lentes $\delta=16/3$ (----), $\delta=8$ (——), $\delta=12$ (-----)

transversales $\delta=16/3$ (----), $\delta=8$ (——), $\delta=12$ (-----)

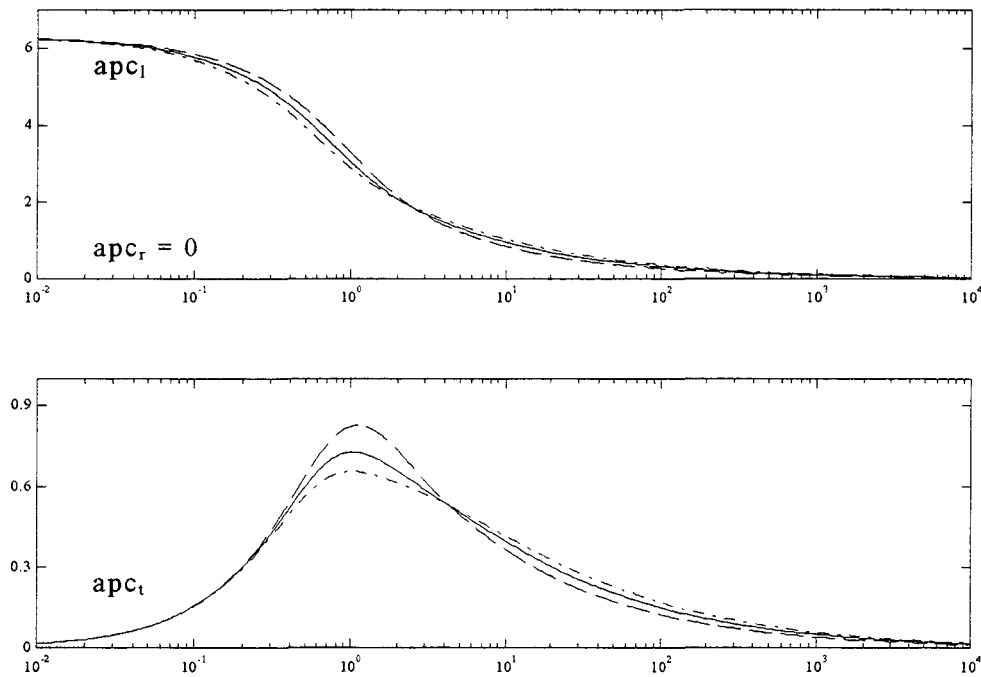
en fonction de la fréquence normalisée

La célérité de l'onde longitudinale rapide reste égale à la célérité normalisée $V_c = \frac{H}{\rho}$.

En haute fréquence ($f \gg f_c$), la célérité de l'onde longitudinale lente tend vers celle de l'onde longitudinale rapide.

L'effet du paramètre structural est faible et ne se fait sentir qu'aux environs de la fréquence f_c .

Figure 1-2 : influence du paramètre structural sur les atténuations



Atténuations par longueurs d'ondes (Np/m) des ondes
longitudinales rapides (—)
longitudinales lentes $\delta=16/3$ (---), $\delta=8$ (—), $\delta=12$ (----)
transversales $\delta=16/3$ (---), $\delta=8$ (—), $\delta=12$ (----)
en fonction de la fréquence normalisée

L'onde longitudinale rapide n'est pas atténuée.

En basse fréquence l'onde lente présente une atténuation importante, elle peut être négligée.

En haute fréquence ($f \gg f_c$), les atténuations par longueur d'onde des ondes longitudinales lentes et rapides tendent à se confondre, comme il en est de même de leurs célérités, il ne paraît se propager qu'une onde longitudinale dans le milieu.

L'effet du paramètre structural δ est faible et n'apparaît qu'aux alentours de la fréquence f_c .

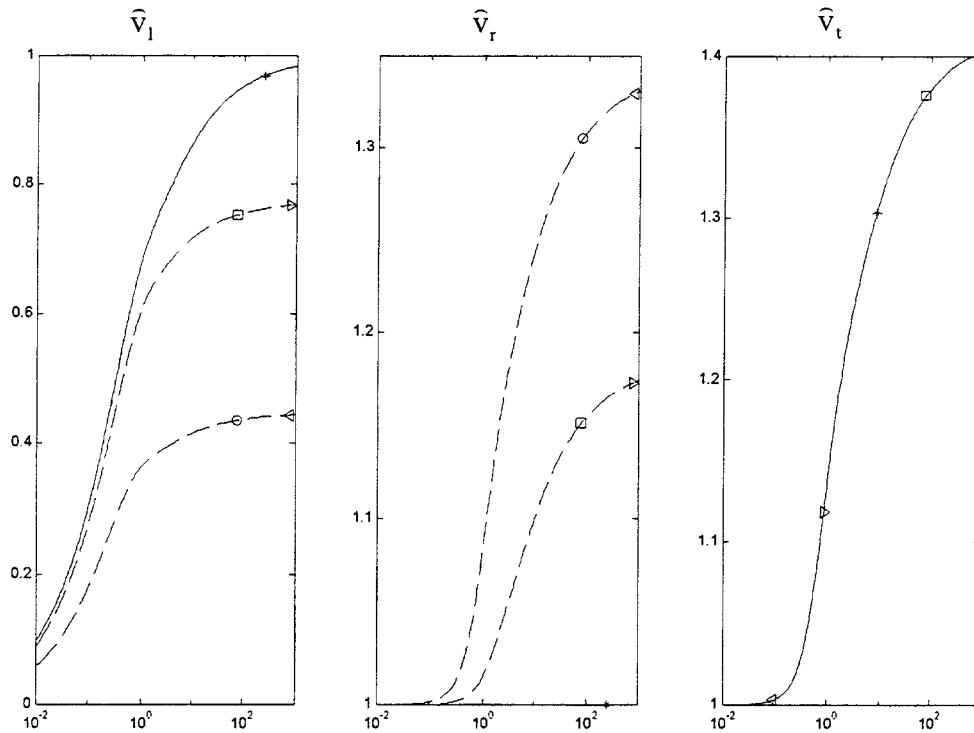
Il ne semble pas affecter la propagation des ondes longitudinales rapides, ceci est dû à la symétrie que nous avons choisie sur les paramètres σ_{ij} et γ_{ij} .

Nous prendrons pour la suite une valeur médiane de 8 pour le paramètre structural δ .

✓ Influence du rapport $\sigma_{22}/\sigma_{11}=R/P$

Les équations de propagations sont symétriques vis à vis des paramètres σ_{11} et σ_{22} pour $\gamma_{11}=\gamma_{22}=0,5$.

Figure 1-3 : influence du rapport R/P sur la célérité



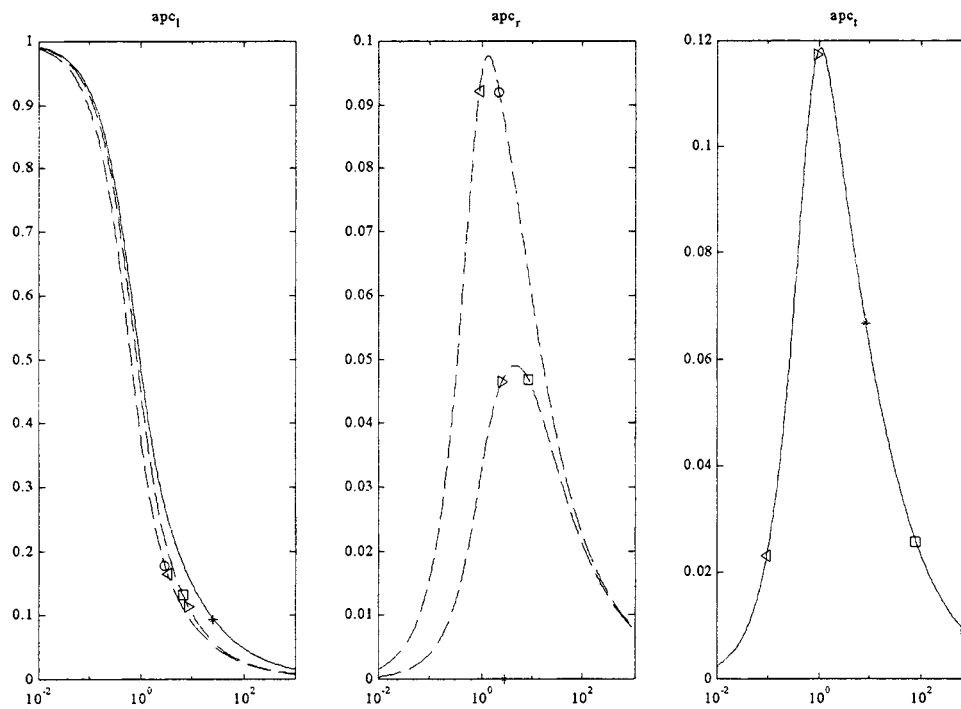
Vitesses normalisées
des ondes longitudinales lentes et rapides et
des ondes transversales en fonction de la fréquence normalisée

- O, < $\sigma_{11} = 0,1, \sigma_{22} = 0,9$ et $\sigma_{11} = 0,9, \sigma_{22} = 0,1$
- , > $\sigma_{11} = 0,3, \sigma_{22} = 0,7$ et $\sigma_{11} = 0,7, \sigma_{22} = 0,3$
- * $\sigma_{11} = 0,5, \sigma_{22} = 0,5$

L'onde transversale, ne dépendant que des paramètres γ_{11} et γ_{22} , n'est pas affectée par la modification des paramètres σ_{11} et σ_{22} .

Dans le régime basse fréquence, pour $f \ll f_c$, l'influence du rapport des constantes élastiques généralisées R/P sur les célérités des ondes longitudinales lentes et rapides est faible.

En régime haute fréquence, pour $f \gg f_c$, l'écart entre les célérités des ondes lentes et rapides se creuse quand le rapport R/P augmente.

Figure 1-4 : Influence du rapport R/P sur l'atténuation par longueur d'onde

Atténuation par longueur d'onde (Np/m)
des ondes longitudinales lentes et rapides et
des ondes transversales en fonction de la fréquence normalisée

O, < $\sigma_{11} = 0,1, \sigma_{22} = 0,9$ et $\sigma_{11} = 0,9, \sigma_{22} = 0,1$
 □, > $\sigma_{11} = 0,3, \sigma_{22} = 0,7$ et $\sigma_{11} = 0,7, \sigma_{22} = 0,3$
 * $\sigma_{11} = 0,5, \sigma_{22} = 0,5$

Le coefficient d'atténuation de l'onde transversale n'est pas modifié par le rapport R/P , les caractéristiques de l'onde transversale ne dépendant que des paramètres γ_{ij} .

Le coefficient d'atténuation des ondes longitudinales lentes décroît très rapidement avec la fréquence.

L'influence du rapport R/P se manifeste surtout aux environs de la fréquence f_c pour le coefficient d'atténuation des ondes longitudinales rapides. Il est d'autant plus important et d'autant plus proche de la fréquence f_c que le rapport R/P est grand;

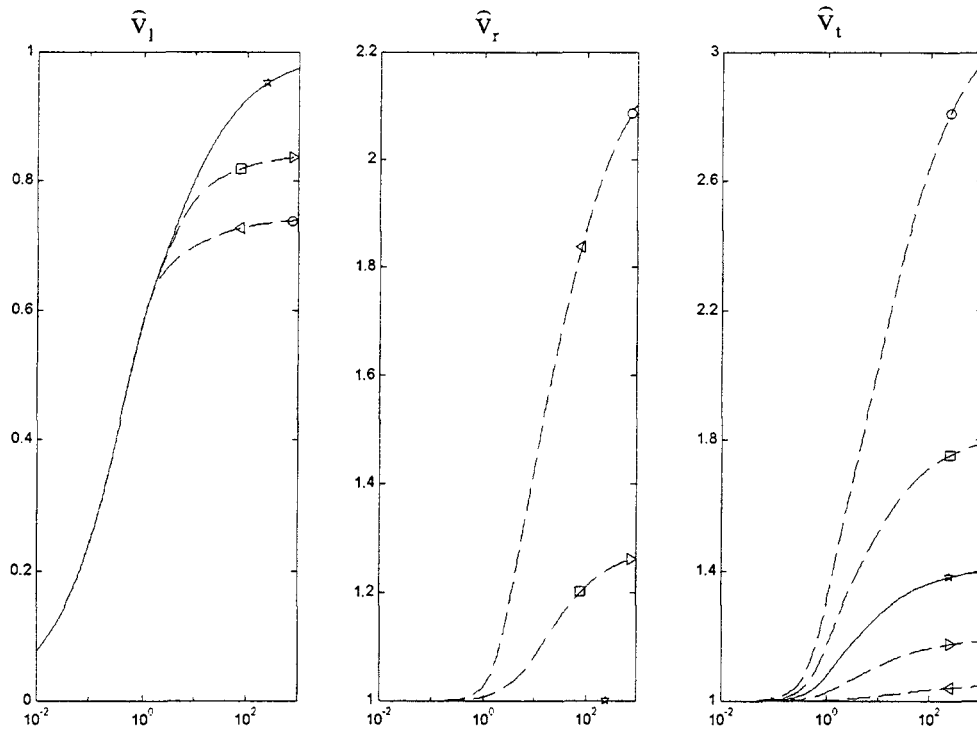
✓ Influence du rapport $\gamma_{22}/\gamma_{11} = \rho_{22}/\rho_{11}$

$\sigma_{11} = 0,5, \sigma_{22} = 0,5, \sigma_{12} = 0, \gamma_{12} = 0$

γ_{11}	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
γ_{22}	0,9	0,7	0,5	0,3	0,1

Cette situation est peu réaliste puisque les deux premières colonnes du tableau correspondent à un fluide plus dense que la matrice solide.

Figure 1-5 : Influence du rapport de densité des deux phases sur les célérités



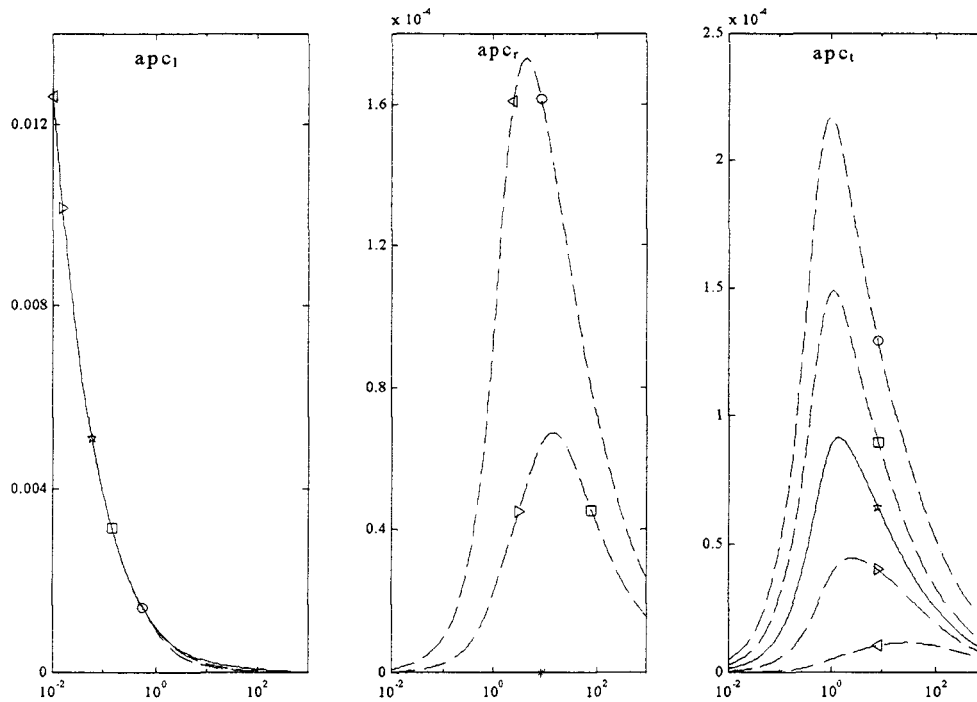
Vitesses normalisées
des ondes longitudinales lentes et rapides et
des ondes transversales en fonction de la fréquence normalisée

$\sigma_{11}=0,5, \sigma_{22}=0,5, \sigma_{12}=0, \gamma_{12}=0$					
γ_{11}	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
γ_{22}	0,9	0,7	0,5	0,3	0,1
	0	$\square$	*	>	<

La célérité de l'onde transversale décroît pour des milieux matrices très denses par rapport au fluide gorgeant.

Les célérités des ondes longitudinales lentes et rapides ne dépendent pas du sens du rapport des densités. L'écart entre les célérités des ondes longitudinales lentes et rapides se creuse avec le rapport de densité des deux phases.

Figure 1-6 : Influence du rapport de densité des deux phases sur l'atténuation par longueur d'onde



Atténuations par longueurs d'ondes (Np/m)
des ondes longitudinales lentes et rapides et
des ondes transversales en fonction de la fréquence normalisée

$\gamma_{12}=0$					
γ_{11}	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
γ_{22}	0,9	0,7	0,5	0,3	0,1
	O	□	*	>	<

L'atténuation par longueur d'onde de l'onde longitudinale lente décroît fortement avec la fréquence. Elle est peu liée au rapport de densité des deux phases. Les coefficients d'atténuation des ondes longitudinales rapides et des ondes transversales présentent un maximum aux environs de la fréquence f_c . Ils sont d'autant plus importants que le rapport des densités est grand, pour l'onde longitudinale, et que la densité de la phase fluide est importante pour l'onde transversale.

1.04-4-b EFFETS DES COUPLAGES

✓ Influence du coefficient de couplage σ_{12}

De par leur construction, les paramètres σ vérifient la relation $\sigma_{11} + \sigma_{22} + 2\sigma_{12} = 1$. Ils doivent en outre satisfaire à la positivité de l'énergie élastique, $\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 > 0$.

en posant $x = \frac{\sigma_{22}}{\sigma_{11}}$, $y = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}}$ et $C = \frac{1}{\sigma_{11}} - 1$, on obtient :

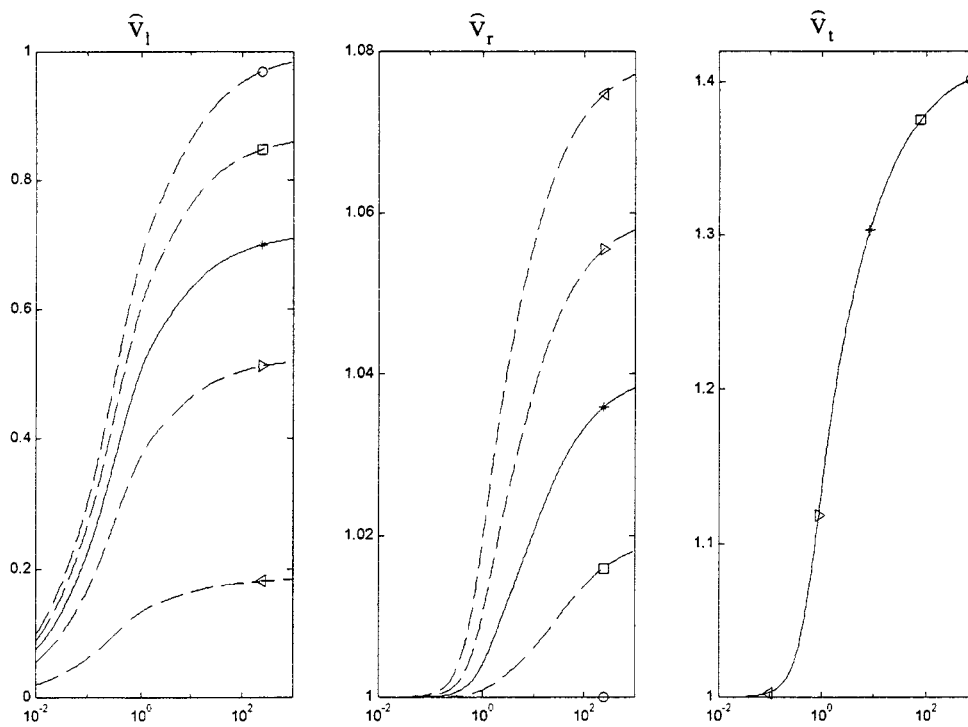
$$\begin{cases} x > y^2 \\ x + 2y = C(>0) \end{cases} \Rightarrow y \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{\sigma_{11}}} - 1 \right] \quad \text{puisque } \sigma_{12} > 0$$

Nous conservons $\gamma_{11} = \gamma_{22} = 0,5$, $\gamma_{12} = 0$ et prenons les valeurs suivantes pour les paramètres σ_{ij} :

$$\sigma_{11} = 0,5$$

σ_{22}	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
σ_{12}	0	0,05	0,1	0,15	0,2

Figure 1-7 : Influence du couplage élastique σ_{12} sur les célérités



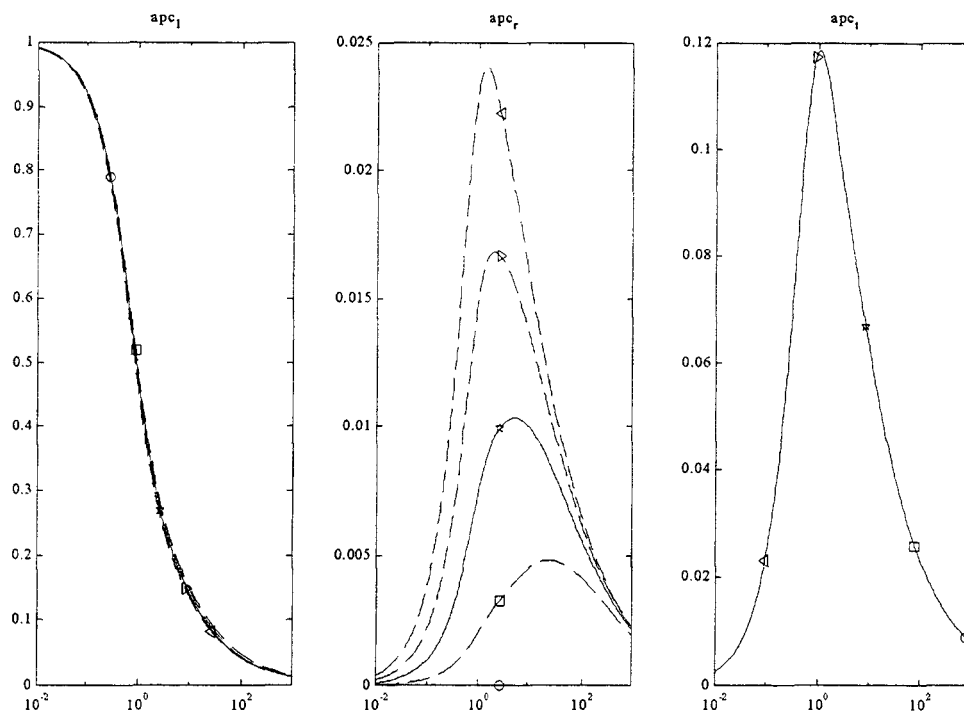
Vitesses normalisées
des ondes longitudinales lentes et rapides et
des ondes transversales en fonction de la fréquence normalisée

$\sigma_{11} = 0,5$					
σ_{22}	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
σ_{12}	0	0,05	0,1	0,15	0,2
	0	□	*	>	<

La célérité de l'onde transversale n'est pas affectée par les conditions de couplage élastique.

Les célérités des ondes longitudinales lentes et rapides sont surtout affectées par le couplage élastique dans la zone de fréquence $f > f_c$. L'écart entre les célérités des ondes longitudinales lentes et rapides est d'autant plus important que le coefficient de couplage élastique σ_{12} est grand.

Figure 1-8 : Influence du couplage élastique σ_{12} sur le coefficient d'atténuation



Atténuations par longueurs d'onde (Np/m)
des ondes longitudinales lentes et rapides et
des ondes transversales en fonction de la fréquence normalisée

$\sigma_{11} = 0,5$					
σ_{22}	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
σ_{12}	0	0,05	0,1	0,15	0,2
	0	□	*	>	<

Le coefficient d'atténuation des ondes longitudinales lentes décroît avec la fréquence. Il est peu sensible au couplage élastique.

Le coefficient d'atténuation des ondes longitudinales rapides présente un maximum aux environs de la fréquence f_c . Il est d'autant plus grand que le couplage est important.

✓ Influence du coefficient de couplage inertiel γ_{12}

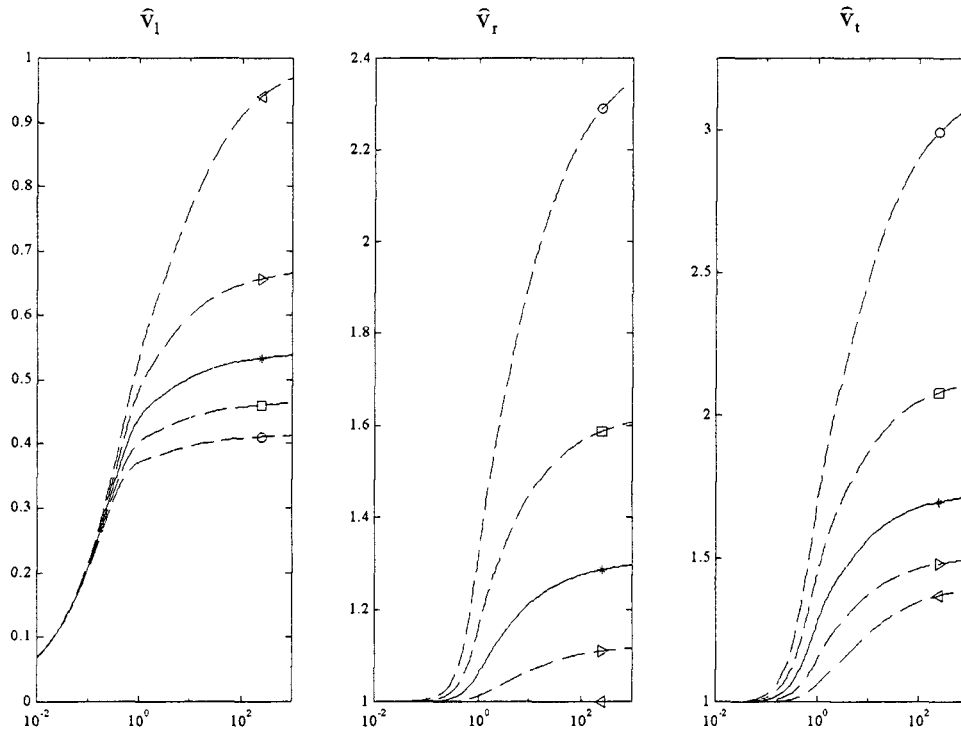
Le coefficient γ_{12} est négatif. Biot ne lui donne pas de limite absolue de variation.

Nous conservons $\sigma_{11}=\sigma_{22}=0,5$ et $\sigma_{12}=0$.

$$\gamma_{11}=0,5$$

γ_{22}	2,5	2	1,5	1	0,5
γ_{12}	-1	-0,75	-0,5	-0,25	0

Figure 1-9 : Influence du couplage inertiel γ_{12} sur les célérités

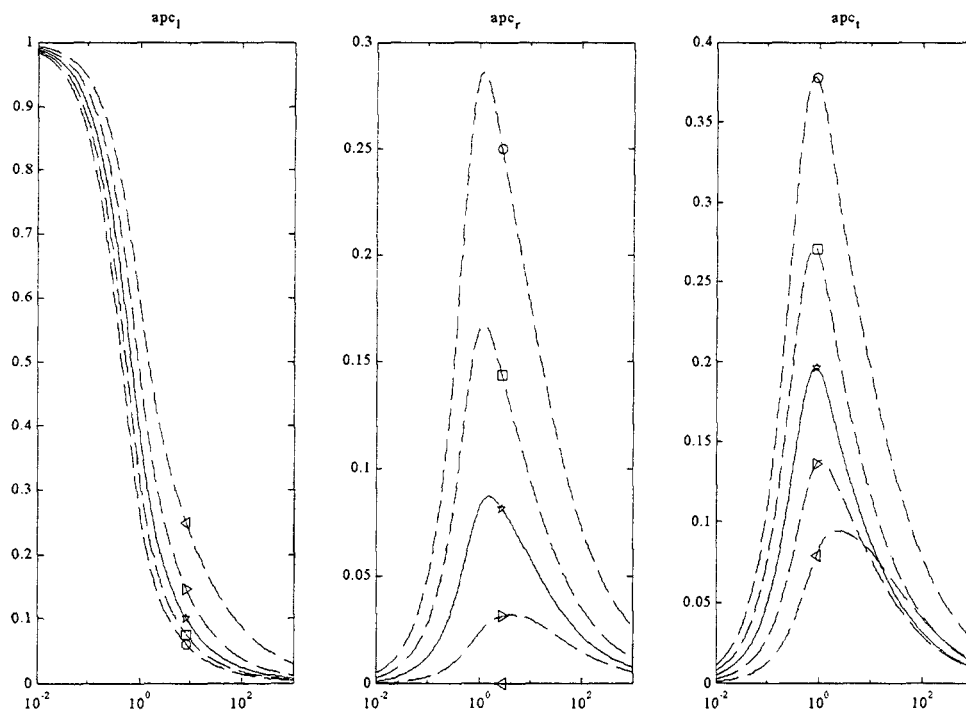


Vitesses normalisées
des ondes longitudinales lentes et rapides et
des ondes transversales en fonction de la fréquence normalisée

$\gamma_{11}=0,5$					
γ_{22}	2,5	2	1,5	1	0,5
γ_{12}	-1	-0,75	-0,5	-0,25	0
	○	□	*	>	<

L'influence du couplage se fait surtout sentir dans la zone de fréquences $f > f_c$. Plus le couplage est important, plus l'écart entre les célérités des ondes longitudinales lente et rapide se creuse. La célérité de l'onde transversale est d'autant plus élevée que le couplage inertiel est important.

Figure 1-10 : Influence du couplage inertiel γ_{12} sur les coefficients d'atténuations



Atténuations par longueurs d'ondes (Np/m)
des ondes longitudinales lentes et rapides et
des ondes transversales en fonction de la fréquence normalisée

$\gamma_{11}=0,5$					
γ_{22}	2,5	2	1,5	1	0,5
γ_{12}	-1	-0,75	-0,5	-0,25	0
	0	□	*	>	<

L'atténuation par longueur d'onde de l'onde longitudinale lente croît rapidement avec la fréquence. Pour les ondes longitudinales rapides et transversales, les atténuations par longueur d'onde sont maximales aux alentours de la fréquence f_c . Elles sont d'autant plus élevées que le couplage est important.

1.04-4-c CONCLUSION

- L'effet du paramètre structural δ est faible, la forme des pores influence peu la propagation
- L'atténuation par longueur d'onde de l'onde longitudinale lente est importante en basse fréquence ($f \ll f_c$) et tend vers zéro en haute fréquence ($f \gg f_c$).
- L'atténuation par longueur d'onde de l'onde longitudinale rapide est maximale aux environs de la fréquence caractéristique f_c . Le maximum d'atténuation tend vers f_c pour des phases fluide et solide de caractéristiques mécaniques très différentes.
- La célérité de l'onde longitudinale lente croît avec la fréquence.
- La célérité de l'onde longitudinale rapide augmente avec la fréquence et atteint une valeur asymptotique en haute fréquence ($f \gg f_c$).

La dépendance des atténuations par longueur d'onde et des célérités des ondes longitudinales rapides et des ondes transversales peuvent se résumer par le tableau suivant :

$\frac{R}{P} \uparrow$	$\Rightarrow$	$\frac{v_r}{v_l} \uparrow$	$apc_r \uparrow$
$\frac{\rho_{11}}{\rho_{22}} \uparrow$	$\Rightarrow$	$\frac{v_r}{v_l} \uparrow$	$apc_r \uparrow$
		$v_t \uparrow$	$apc_t \downarrow$
$\sigma_{12} \uparrow$	$\Rightarrow$	$\frac{v_r}{v_l} \uparrow$	$apc_r \uparrow$
$ \gamma_{12} \uparrow$	$\Rightarrow$	$\frac{v_r}{v_l} \uparrow$	$apc_r \uparrow$
		$v_t \uparrow$	$apc_t \uparrow$

1.04-5 SIMULATIONS DU MODELE DE BIOT POUR UNE CERAMIQUE D'HYDROXYAPATITE POREUSE

Nous présentons une modélisation de la propagation dans les céramiques d'hydroxy apatite basée sur le modèle de Biot. La masse volumique de l'hydroxy apatite est de 3160 kg/m^3 . Son coefficient de Poisson¹¹ et son module de Young¹² sont voisin de 34 GPa et de 0,28. La porosité de la céramique est de l'ordre de 70%, à 5% près. Nous avons pris pour l'eau gorgeant le milieu poreux une masse volumique de 1000 kg/m^3 , une célérité de 1500 m/s et une viscosité de 1 mPa s.

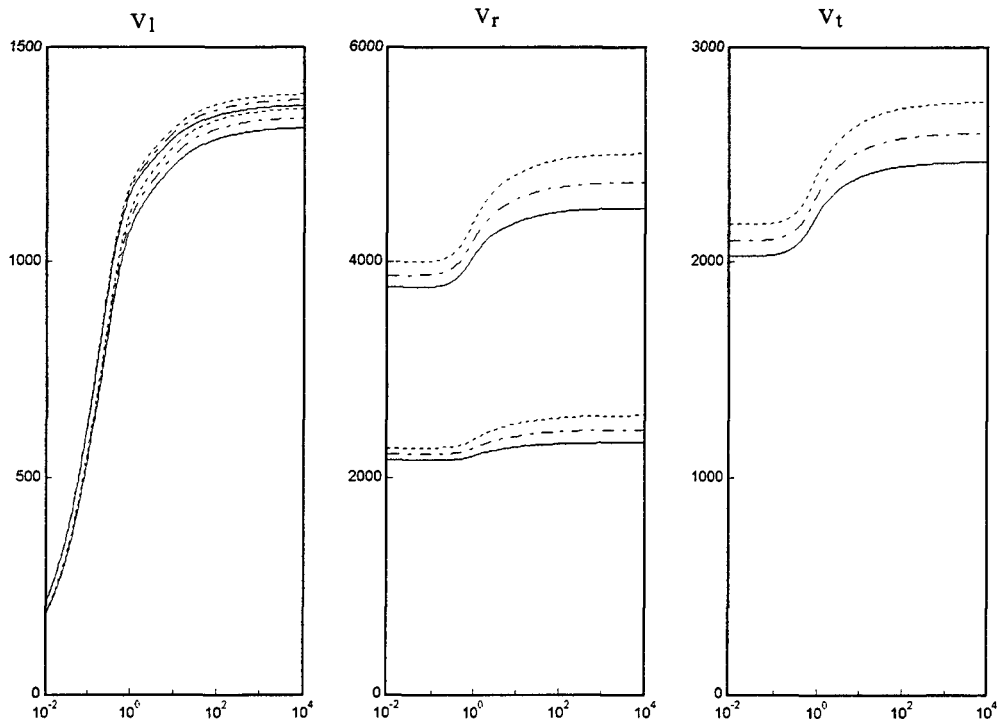
Pour trois valeurs de la porosité, $\beta = 68\%$, $\beta = 70\%$, $\beta = 72\%$, nous calculons les bornes de Hashin et Shtrikman des coefficients élastiques K_m et G_m du milieu poreux à partir des équations 1.04-8. Nous conservons la valeur 8 au paramètre structural δ et choisissons une grande plage pour la fréquence normalisée. Nous calculons les constantes élastiques généralisées P, Q et R par les équations 1.04-5 à 1.04-7 puis les paramètres σ_{ij} de Biot, les masses volumiques ρ_{11} , ρ_{22} et ρ_{12} par les équations 1.04-9 puis les paramètres γ_{ij} . Nous calculons ensuite les célérités et les coefficients d'atténuation des trois ondes de Biot à partir des équations 1.04-10 et 1.04-11.

Les ordres de grandeurs des paramètres de Biot, calculés pour la valeur moyenne des bornes de Hashin Shtrikman des coefficients élastiques vérifient : $\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{11}} \approx 0,1$, $\sigma_{12} \approx 0,01$,

$\frac{\gamma_{11}}{\gamma_{22}} \approx 1,4$, $\gamma_{12} \approx -0,1$, soit des rapports R/P et ρ_{22}/ρ_{11} élevé, et des couplages faibles.

¹¹ Grenoble D.E., Katz J.L., Dunn K.L., Gilmore R.S., Murty K.L., 'The elastic properties of hard tissues and apatites', J.Biomed.Mater.Res. Vol 6, p221-223, 1972

¹² Moroi H.H., Kimoto K., Moroi R., Terado Y., 'Numeric approach to the biomechanical analysis of thermal effects in coated implant', Int.J.Prostodont, Vol 6, p564-572, 1993

Figure 1-11 : célérités des trois ondes de Biot

Célérités (m/s) en fonction de la fréquence normalisée
obtenues à partir des bornes supérieures et inférieures de Hashin Shtrikman

pour $\beta = 68\%$ (—)

pour $\beta = 70\%$ (---)

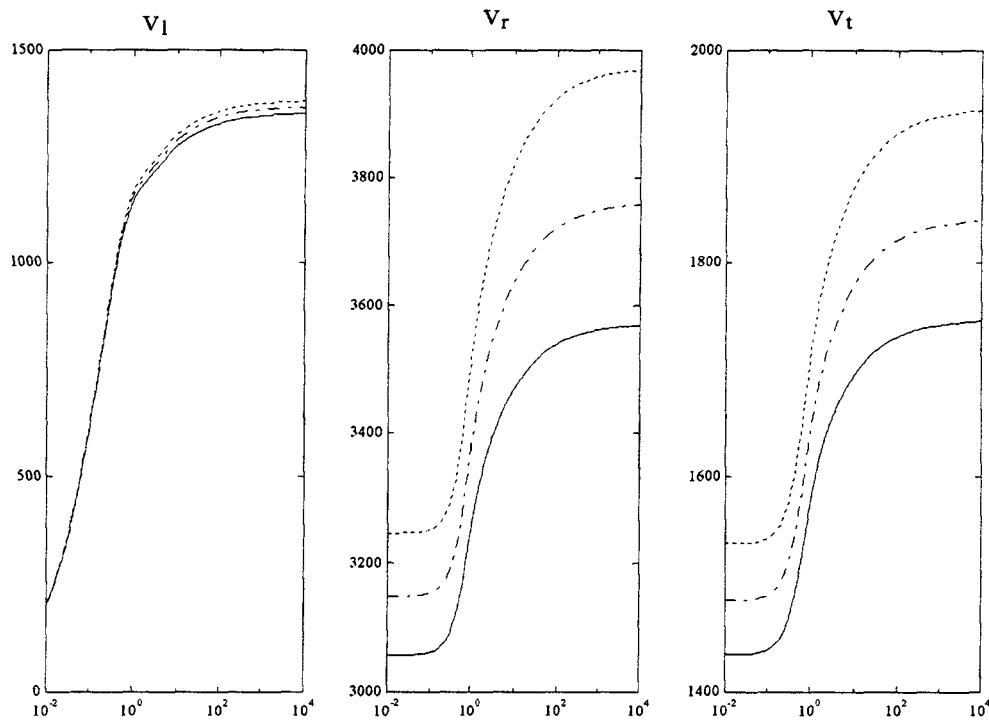
pour $\beta = 72\%$ (-.-.-)

Les célérités des ondes transversales obtenues à partir de la borne inférieure des coefficients élastiques de Hashin Shtrikman sont nulles.

La célérité de l'onde longitudinale lente est peu affectée par les grandes variations que confèrent les bornes de Hashin et Shtrikman aux modules élastiques du milieu poreux.

La figure 1-12 suivante présente les célérités des trois ondes de Biot calculées à partir des valeurs moyennes des bornes inférieures et supérieures des modules élastiques du milieu poreux.

Figure 1-12 : Célérités des trois ondes de Biot calculées pour les valeurs moyennes des coefficients élastiques dans les bornes de Hashin et Shtrikman



Célérités (m/s) en fonction de la fréquence normalisée

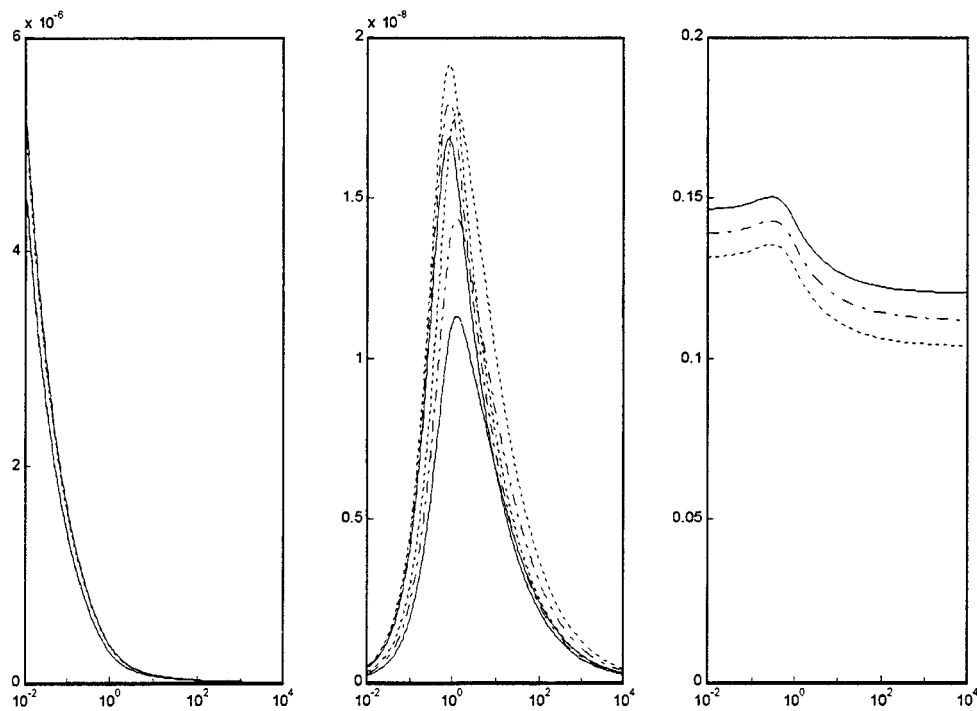
pour $\beta = 68\%$ (—)

pour $\beta = 70\%$ (---)

pour $\beta = 72\%$ (-.-.-)

Dans la zone haute fréquence ($f \gg f_c$), il faut environ $3 \mu s$ à l'onde longitudinale rapide, et $7 \mu s$ à l'onde longitudinale lente pour traverser 1 cm de milieux poreux. L'écart de temps entre les deux ondes est donc d'environ $4 \mu s$. En vertu du critère de Rayleigh, il sera nécessaire de faire la mesure sur une bande d'au moins 250 kHz pour pouvoir séparer ces deux ondes.

Figure 1-13 : *Coefficients d'atténuations des trois ondes de Biot*



Coefficients d'atténuation (Np/mm) en fonction de la fréquence normalisée
obtenues à partir des bornes supérieures et inférieures de Hashin Shtrikman

pour $\beta = 68\%$ (——)

pour $\beta = 70\%$ (-----)

pour $\beta = 72\%$ (.....)

Les coefficients d'atténuations des ondes longitudinales sont extrêmement faibles. Il paraît alors peu plausible de parvenir à les mesurer, et donc à en tirer une information utile à la caractérisation des milieux poreux.

1.04-6 ASPECT EXPERIMENTAL

Les milieux poreux, très utilisés comme absorbant phonique ont été grandement étudiés dans le domaine audible. Dans ce cas ils sont gorgés d'air, la propagation n'a pratiquement lieu que dans la phase solide¹³ Les phénomènes de propagation sont donc assez différents de ceux que nous rencontrons quand ils sont gorgés d'eau. Notons cependant que les méthodes expérimentales sont des méthodes harmoniques utilisant des ondes stationnaires en espace libre ou dans un tube de Kundt. Attenborough¹⁴ regroupe un grand nombre de mesures de la relation de dispersion et de l'impédance acoustique pour ce type de milieux.

Dans le domaine ultrasonore, ces méthodes harmoniques sont progressivement délaissées à la faveur de méthodes impulsionnelles. Ce sont à notre connaissance les seules méthodes qui ont été utilisées pour l'étude de milieux poreux gorgés d'eau.

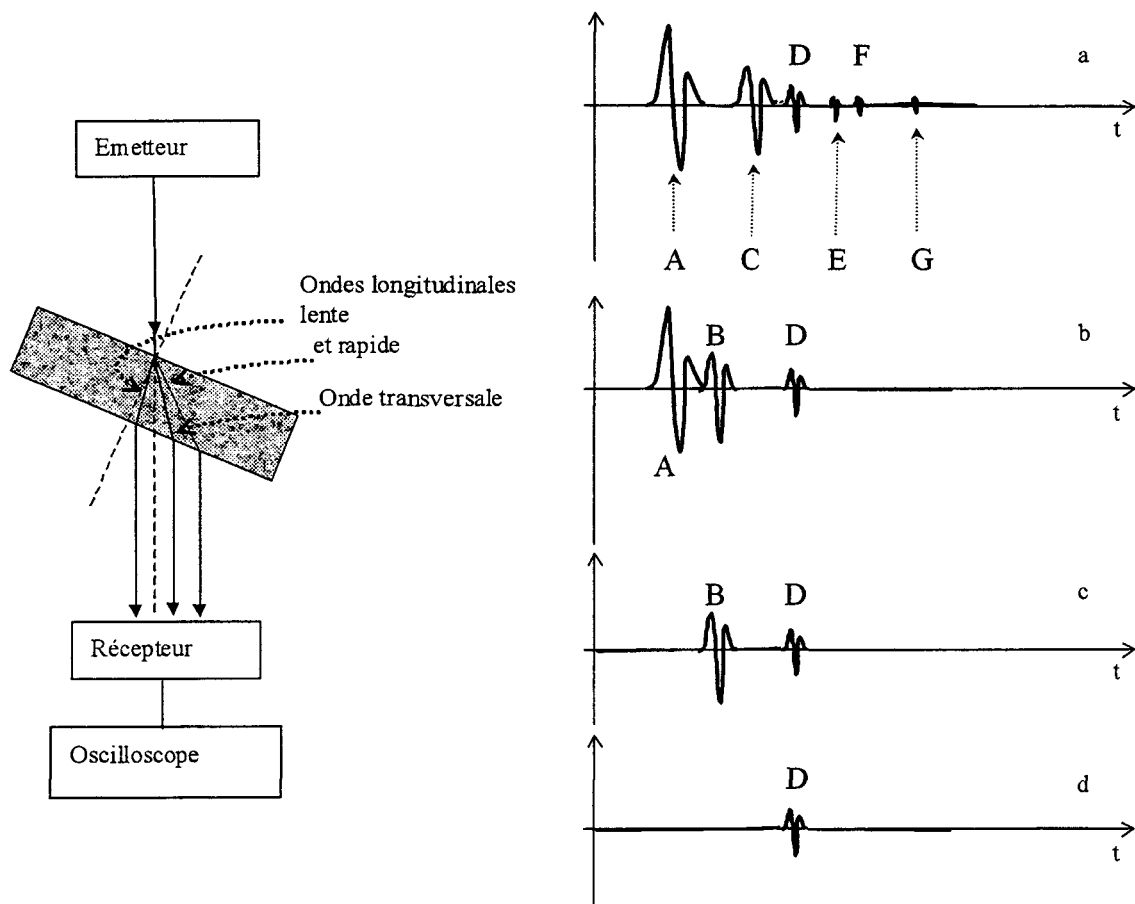
1.04-6-a MISE EN EVIDENCE DE L'ONDE LENTE DE BIOT

Ainsi, l'utilisation qualitative d'une méthode pulse-écho permet à Plona¹⁵ d'apporter la preuve de l'existence de l'onde lente de Biot. Il utilise comme milieu poreux une agrégation de billes de verres soudées dont le diamètre est de l'ordre de 250 μm . Ce squelette est gorgé d'eau. Les mesures sont effectuées en incidence oblique avec une paire de transducteurs de fréquence centrale 500 kHz, l'un d'entre eux est connecté à un générateur de salves, l'autre à un oscilloscope. Il élimine progressivement les ondes les plus rapides en augmentant l'angle d'incidence du faisceau acoustique. Nous présentons sur la figure suivante le schéma du dispositif expérimental et des oscillogrammes obtenus.

¹³ Albert D.G., 'A comparison between wave propagation in water-saturated and air-saturated porous materials' J.Appl.Phys., 73 (1), pp 28-36, jan 1993

¹⁴ Attenborough K., 'Acoustical characteristics of rigid fibrous absorbents and granular materials', J.Acoust.Soc.Am. 73(3),p785-799, 1983

¹⁵ Plona T.J., 'Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies', Appl. Phys. Lett. 36, p259-261, feb 1980



L'analyse des échos est effectuée de la façon suivante :

✓ Sur l'oscillogramme a, en incidence normale :

Les impulsions A, C, E et G sont régulièrement espacées dans le temps. Elles correspondent aux multiples réflexions de l'onde longitudinale rapide aux interfaces milieu poreux-eau.

L'apparition des impulsions D et F est conditionnée par la présence d'un milieu poreux. L'intervalle de temps entre les impulsions D et F est le même qu'entre A et C. L'impulsion D est associée à la présence de l'onde lente de Biot. Cette onde subit une conversion de mode en onde rapide lors de sa réflexion à l'interface milieu poreux-eau, ce qui fait apparaître l'impulsion F (après un aller-retour dans le milieu de l'onde rapide).

✓ oscillogramme, b l'échantillon est incliné :

Il apparaît l'impulsion B associé à l'onde transversale dans le milieu poreux. Les échos liés aux multiples réflexions disparaissent.

✓ oscillogramme c :

L'angle d'incidence augmente jusqu'à provoquer la réflexion totale de l'onde rapide. Il ne subsiste que les impulsions associées aux propagations de l'onde lente de Biot et de l'onde transversale. La recherche des maxima d'amplitude pour chaque impulsion, en déplaçant le transducteur dans son plan, permet de conclure que l'onde lente se propage à une vitesse inférieure à la vitesse de propagation dans l'eau.

✓ oscillogramme d :

L'angle d'incidence est encore augmenté de façon à éliminer l'onde transversale. Il n'apparaît plus sur le diagramme d'échos que celui lié à la propagation de l'onde lente de Biot.

Les oscillogrammes présentés ne sont que des schémas qualitatifs. Les positions des impulsions A, B et D se décalent dans le temps au fur et à mesure que l'échantillon est incliné.

1.04-6-b APPLICATION A DES MESURES SUR DES OS

Plus récemment, Hosokawa¹⁶ étudie la propagation d'ondes ultrasonores dans des os afin d'évaluer les possibilités du suivi de l'ostéoporose par une méthode ultrasonore. Il utilise une méthode impulsioneuse et analyse les signaux transmis. Il parvient ainsi à détecter les ondes lentes et rapides de Biot. Il obtient, bien que la dimension des pores soit comparable à la longueur d'onde, une bonne adéquation entre les résultats expérimentaux et les simulations des célérités basées sur le modèle de Biot. Cela laisse à penser que le modèle de Biot reste dans une certaine mesure valable en dehors de l'hypothèse restrictive $\lambda \gg a$. Cardoso et al¹⁷ ont réalisé des mesures similaires, in vitro, sur des os trabéculaires humains et bovins. Ils parviennent à détecter les ondes lentes de Biot et obtiennent les paramètres phénoménologiques du modèle de Biot. Une bonne adéquation entre les résultats et les simulations semble réalisée. Ils notent une atténuation de l'onde lente plus faible que celle de l'onde rapide.

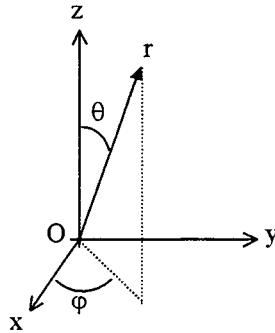
La microstructure des os est assez différente de celle des milieux poreux que nous étudierons. La partie spongieuse de l'os peut être modélisée par un ensemble de cylindres, dans une orientation privilégiée, plongés dans la moelle. Les matériaux de substitution que nous utiliserons sont constitués d'une matrice solide contenant des pores communicants à peu près sphériques : Hosokawa et Cardoso obtiennent des célérités des ondes lente et rapide de Biot de l'ordre de 1500 m/s et de 2500 m/s, les résultats de simulation montrent que nous devrions nous attendre à des célérités de l'ordre de 1500 m/s et de 3500 m/s pour les ondes longitudinales lente et rapide.

¹⁶ Hosokawa A., 'A study on the propagation phenomena of ultrasonic waves in cancellous bone', Thesis, Doshisha University, nov 1997

¹⁷ Cardoso L., Teboul F., Meunier A., Oddou C., 'Theoretical and experimental approach in ultrasonic characterization of cancellous bone', Journées Os-Ultrason, Compiègne 24-25jan 2002

1.05 THEORIES DE LA DIFFUSION MULTIPLE

Nous présenterons les solutions de l'équation de Helmholtz en coordonnées sphériques comme préliminaires mathématiques. Le choix du système de coordonnées sphériques s'impose de fait puisqu'il sera nécessaire de résoudre les équations de continuités à la surfaces des hétérogénéités que nous supposons sphériques. Nous utilisons la définition 'classique' des coordonnées sphériques représentées sur le schéma suivant :



Nous donnerons l'expression des contraintes. La solution des équations de continuités à la surface d'une sphère sera introduite.

Nous aborderons ensuite le cas de la diffusion par un grand nombre de sphères. L'expression littérale de la solution des équations de continuités aux surfaces de toutes les inclusions sera donnée sous la forme synthétique que revêt le modèle de la matrice multicentrée.

Nous interpréterons les ondes diffusées par une sphère à l'aide de la théorie géométrique de la diffraction. Nous aborderons dans ce cadre le cas de la diffusion par deux sphères. L'interprétation en termes de rayons acoustiques permettra de mettre en avant la complexité des interactions en haute fréquence.

Le grand nombre de connaissances sur le milieu que la formulation de la diffusion par la matrice multicentrée exige sera réduit par une approche statistique. Nous introduirons alors les modèles de Foldy et de Waterman et Truell de traitement statistique de la diffusion.

Nous discuterons ces modèles.

Nous présenterons ensuite des résultats de simulation. Nous étudierons à cette occasion la diffusion par une inclusion fluide dans une matrice solide et la diffusion par une inclusion solide dans une matrice fluide. Nous discuterons de cette approche fournissant une évaluation des célérités des ondes se propageant préférentiellement dans la phase solide ou dans la phase fluide.

1.05-1 DIFFUSION PAR UNE SPHERE

1.05-1-a SOLUTION DE L'EQUATION DE HELMHOLTZ EN COORDONNEES SPHERIQUES

Le déplacement particulaire associé à une onde se propageant dans un solide vérifie l'équation d'Helmholtz 1.02-8, $\frac{1}{k_L^2} \overline{\text{grad}}(\text{div} \bar{u}) - \frac{1}{k_T^2} \overline{\text{rot}}[\overline{\text{rot}}(\bar{u})] + \bar{u} = \bar{0}$.

k_L et k_T sont les nombres d'ondes longitudinaux et transversaux.

Nous recherchons sa solution dans un système de coordonnées sphériques en utilisant le théorème d'Helmholtz 1.02-6.

La séparation des variables est effectuée par les potentiels :

$$\Phi_{nm}(r, \theta, \varphi) = f_n(k_L r) P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

$$\Psi_{nm}(r, \theta, \varphi) = f_n(k_T r) P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

où f_n est une fonction de Bessel ou de Hankel sphérique et P_n^m , le polynôme de Legendre généralisé.

Le déplacement $\bar{u}$, solution de l'équation de Helmholtz s'exprime alors comme une combinaison linéaire d'harmoniques sphériques¹⁸,

$$\bar{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \bar{u}_{nm} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{nm} \bar{l}_{nm}^{(1/3)} + B_{nm} \bar{m}_{nm}^{(1/3)} + C_{nm} \bar{n}_{nm}^{(1/3)} \quad (1.05-1)$$

Les expressions des vecteurs $\bar{l}_{nm}^{(1/3)}$, $\bar{m}_{nm}^{(1/3)}$ et $\bar{n}_{nm}^{(1/3)}$ sont données en annexe 3. Le terme $A_{nm} \bar{l}_{nm}^{(1/3)}$ représente la contribution de l'harmonique nm à la composante longitudinale du déplacement. Les termes $B_{nm} \bar{m}_{nm}^{(1/3)}$ et $C_{nm} \bar{n}_{nm}^{(1/3)}$ représentent quant à eux les contributions de l'harmonique nm aux deux composantes transversales du déplacement.

Les exposants (1) ou (3) apparaissant dans les vecteurs déplacements signifient que nous utiliserons pour f_n , des fonctions de Bessel ou de Hankel sphériques. La présence ou pas d'une singularité à l'origine guidera ce choix. Par exemple, pour une onde diffusée, qui est divergente, nous exprimerons le déplacement par une combinaison linéaire des harmoniques sphériques basée sur les vecteurs

¹⁸ Morse P.M., Feshbach H, 'Method of theoretical physics, part 2', chap 13, p 1759-1900 McGraw-Hill book company inc., 1953

$\bar{l}_{nm}^{(3)}$, $\bar{m}_{nm}^{(3)}$ et $\bar{n}_{nm}^{(3)}$, dans lesquels nous prendrons des fonctions de Hankel sphériques, présentant une singularité à l'origine.

1.05-1-b CONTRAINTES

La loi de Hooke relie la contrainte au déplacement. On obtient en coordonnée sphérique dans le cas d'un solide isotrope :

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{rr}}{\mu} &= \frac{\lambda}{\mu} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r u_\theta \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r u_\varphi) \right] + 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \frac{\tau_{r\theta}}{\mu} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \\ \frac{\tau_{r\varphi}}{\mu} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \end{aligned} \quad (1.05-2)$$

où

- u_r, u_θ, u_φ sont les composantes du vecteur déplacement $\bar{u}$ dans la base sphérique $(\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_\varphi)$
- τ_{ij} représente la contrainte s'exerçant sur la surface de normale $\bar{e}_i$ dans la direction $\bar{e}_j$.
- λ et μ les coefficients de Lamé

Les contraintes s'expriment donc en fonction des amplitudes des harmoniques sphériques A_{nm} , B_{nm} et C_{nm} .

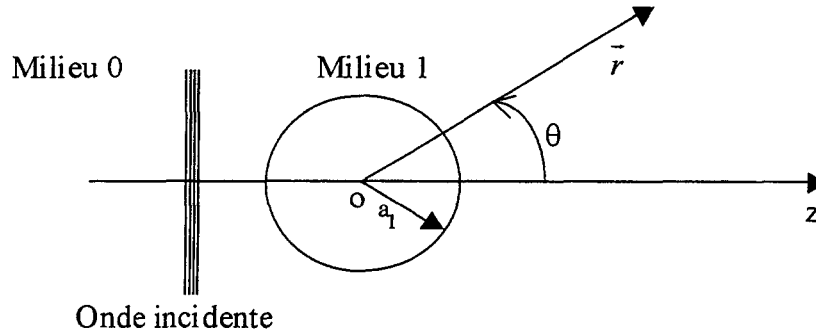
1.05-1-c DIFFUSION PAR UNE SPHERE

Soit un milieu homogène illimité de masse volumique ρ_0 et de coefficients de Lamé λ_0 et μ_0 , dans lequel est plongé une sphère homogène, de rayon a_1 , de masse volumique ρ_1 et de coefficients de Lamé λ_1 et μ_1 . Nous faisons coïncider le centre de la sphère et l'origine du système de coordonnées.

Ce milieu est soumis à une onde plane incidente de pulsation ω se propageant suivant l'axe $z'z$, nous introduisons les nombres d'ondes longitudinaux et transversaux.

$$k_{L0} = \omega \sqrt{\frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho_0}} \quad \text{et} \quad k_{T0} = \omega \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0}} \quad \text{pour le milieu matrice}$$

$$k_{L1} = \omega \sqrt{\frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1}} \text{ et } k_{T1} = \omega \sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1}} \text{ pour l'inclusion}$$



Les déplacements associés aux ondes acoustiques dans les deux milieux étant solutions de l'équation d'Helmholtz en coordonnées sphériques, ils s'expriment dans le formalisme introduit précédemment.

Une onde incidente et une onde diffusée se propagent dans le milieu matrice, ainsi qu'une onde transmise, dans l'inclusion.

$\bar{u}^{\text{ext}} = \bar{u}^{\text{inc}} + \bar{u}^{\text{diff}}$ est le déplacement à l'extérieur de la sphère dû à la composition des ondes incidentes et diffusées dans le milieu matrice, τ^{ext} , la contrainte associée. Nous noterons $\bar{u}^{\text{int}}$ le déplacement interne au diffuseur et τ^{int} , la contrainte associée.

La résolution des équations de continuités à la surface de l'inclusion nous permet de tirer une relation entre tous les coefficients A_{nm} , B_{nm} et C_{nm} des décompositions harmoniques des trois ondes.

soit, en $r = a_1$

$$\left. \begin{array}{l} u_r^{\text{ext}} = u_r^{\text{int}} \\ u_\theta^{\text{ext}} = u_\theta^{\text{int}} \\ u_\phi^{\text{ext}} = u_\phi^{\text{int}} \end{array} \right|_{r=a_1} \quad \left. \begin{array}{l} \tau_r^{\text{ext}} = \tau_r^{\text{int}} \\ \tau_{r\theta}^{\text{ext}} = \tau_{r\theta}^{\text{int}} \\ \tau_{r\phi}^{\text{ext}} = \tau_{r\phi}^{\text{int}} \end{array} \right|_{r=a_1} \quad (1.05-3)$$

La solution fait apparaître un couplage entre ondes longitudinales et transversales, et peut s'exprimer sous la forme :

$$\bar{u}^{\text{diff}}(\bar{a}_1) = \mathbb{T}_1 [\bar{u}^{\text{inc}}(\bar{a}_1)] \quad (1.05-4)$$

où $\mathbb{T}$ représente un opérateur de diffusion tel que les coefficients de décomposition des ondes diffusées en harmoniques sphériques s'expriment en fonction de ceux des ondes incidentes sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} A_{nm}^{diff} \\ B_{nm}^{diff} \\ C_{nm}^{diff} \end{pmatrix} = T_n \begin{pmatrix} A_{nm}^{inc} \\ B_{nm}^{inc} \\ C_{nm}^{inc} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad T_n = \begin{pmatrix} T_n^{ll} & T_n^{lt} & 0 \\ T_n^{tl} & T_n^{tt} & 0 \\ 0 & 0 & T_n^{ss} \end{pmatrix} \quad (1.05-5)$$

Dans le cas présenté ici, la symétrie de révolution autour de l'axe z'z réduit le nombre de coefficients à ceux pour lesquels m est nul.

Les termes T_n^{ij} traduisent les coefficients des harmoniques n de :

- diffusion de la composante longitudinale de l'onde incidente en onde longitudinale, pour T_n^{ll}
- diffusion de la composante transversale de l'onde incidente en onde longitudinale, pour T_n^{lt}
- diffusion de la composante longitudinale de l'onde incidente en onde transversale, pour T_n^{tl}
- diffusion de la composante transversale de l'onde incidente en onde transversale, pour T_n^{tt} et T_n^{ss}

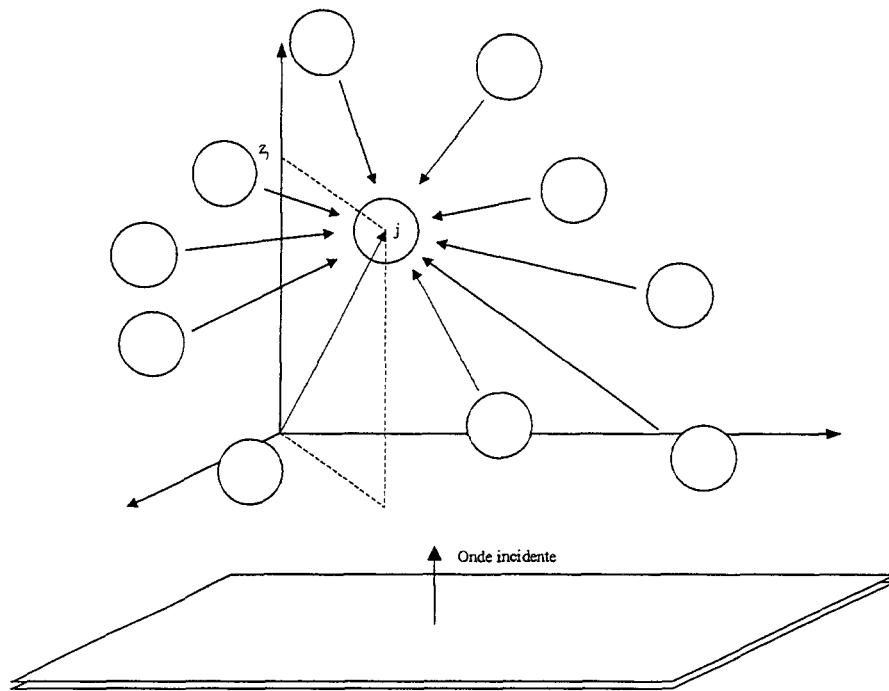
Les expressions des éléments de la matrice de diffusion peuvent être trouvées dans Brill et Gaunard¹⁹ par exemple, nous les reproduisons en annexe 4 ainsi que quelques éléments du calcul de la matrice de diffusion.

¹⁹ Brill D., Gaunard G., 'Resonance theory of elastic waves ultrasonically scattered from an elastic sphere', J.Acoust.Soc.Am 81 (1),p1-21, jan 1987

1.05-2 DIFFUSION PAR UN GRAND NOMBRE DE SPHERES

Dans ce cas, le milieu matrice contient N inclusions sphériques homogènes caractérisées par :

- ✓ leurs positions $\vec{r}_j$
- ✓ leurs rayons a_j
- ✓ leurs coefficients de Lamé λ_j et μ_j
- ✓ leurs masses volumiques ρ_j



Ce milieu est soumis à une onde plane incidente de pulsation ω se propageant suivant l'axe $z'z$. Nous introduisons les nombres d'ondes longitudinaux et transversaux des ondes pouvant se propager dans les inclusions, soit pour l'inclusion courante placée en $\vec{r}_j$:

$$k_{Lj} = \omega \sqrt{\frac{\lambda_j + 2\mu_j}{\rho_j}} \text{ et } k_{Tj} = \omega \sqrt{\frac{\mu_j}{\rho_j}}$$

Les données du milieu matrice restent inchangées.

L'équation fondamentale de la diffusion multiple décrit les interférences entre toutes les ondes diffusées et l'onde incidente :

$$\bar{u}(\bar{r}) = \bar{u}^{inc}(\bar{r}) + \sum_{j=1}^N \bar{u}_j^{diff}(\bar{r}) \quad (1.05-6)$$

La résolution des conditions de continuités à la surface de chaque inclusion est nécessaire à l'évaluation des ondes diffusées. Pour ce faire, il est pratique de définir N repères dont les origines coïncident avec les centres des N inclusions.

Les conditions de continuités gardent la forme donnée par l'équation 1.05-3 à condition de redéfinir l'onde incidente sur chaque inclusion. Nous appelons cette onde, l'onde d'excitation sur l'inclusion. Cette onde d'excitation pour l'inclusion courante placée en $\bar{r}_j$, est composée de l'onde incidente et de toutes les ondes diffusées par toutes les inclusions autres que celle placée en $\bar{r}_j$:

$$\bar{u}^{exc/j}(\bar{r}_j) = \bar{u}^{inc}(\bar{r}_j) + \sum_{i \neq j}^N \bar{u}^{diff/i}(\bar{r}_j)$$

L'onde dans le milieu matrice s'exprime alors par :

$$\bar{u}^{ext}(\bar{r}_j) = \bar{u}^{exc/j}(\bar{r}_j) + \bar{u}^{diff/j}(\bar{r}_j)$$

soit d'après 1.05-4 :

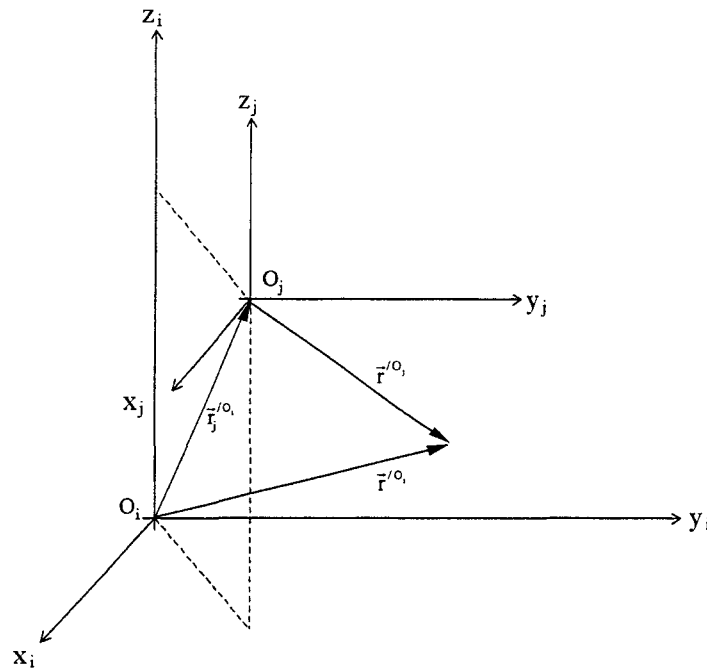
$$\bar{u}^{diff/j}(\bar{r}_j) = \mathbb{T}_j \left[\bar{u}^{exc/j}(\bar{r}_j) \right] = \mathbb{T}_j \left[\bar{u}^{inc}(\bar{r}_j) + \sum_{i \neq j}^N \bar{u}^{diff/i}(\bar{r}_j) \right]$$

où $\mathbb{T}_j$ et $\bar{u}^{diff/j}(\bar{r}_j)$ représentent l'opérateur de diffusion associé à l'inclusion placée en $\bar{r}_j$ et l'onde diffusée. Cette onde diffusée s'exprime naturellement par une décomposition en harmoniques sphériques dans la base d'origine O_j , centre de l'inclusion. Il en est de même des décompositions de toutes les ondes diffusées qui se rapportent toutes aux bases centrées sur l'objet diffusant. Il est nécessaire de pouvoir les exprimer dans une base commune afin d'en calculer la somme. Nous devons alors effectuer la translation des vecteurs $\bar{l}_{mn}$, $\bar{m}_{mn}$ et $\bar{n}_{mn}$ introduits dans les décompositions harmoniques.

1.05-2-a TRANSLATIONS DES VECTEURS DEPLACEMENTS

Soit un point d'observation localisé par le rayon vecteur $\vec{r}^{/O_i}$, dans la base centrée sur O_i ou $\vec{r}^{/O_j}$, dans la base centrée sur O_j .

Nous supposons le vecteur déplacement connu au point d'observation dans la base centrée sur O_i et désirons l'exprimer dans la base centrée sur O_j .



S'agissant d'ondes diffusées, nous devons translater des harmoniques sphériques faisant apparaître des fonctions de Hankel sphériques. La nouvelle base ne contient pas de singularité à l'origine, la nouvelle expression du déplacement fera donc apparaître des fonctions de Bessel sphériques.

Le changement de base est effectué à partir de la translation d'un potentiel de la forme $\Phi_{nm}(\vec{r}) = f_n(k_L r) P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$ ou $\Psi_{nm}(\vec{r}) = f_n(k_T r) P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$.

Il s'exprime par²⁰ :

$$\Phi_{nm}^{(3)}(\vec{r}^{/O_i}) = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v A_{v\mu}^{nm}(\vec{r}_j^{/O_i}) \Phi_{v\mu}^{(1)}(\vec{r}^{/O_j})$$

²⁰ Friedman B., Russek J., 'Addition theorems for spherical waves'
Quart.Appl.Math. 12, 13-23 (1954)

Nous pouvons en tirer $\vec{l}_{nm} = \vec{\nabla} \Phi_{nm}$. Puis par les calculs de $\vec{m}_{nm} = \vec{\nabla} \wedge \left[\vec{r}^{/O_i} \Psi_{nm} \left(\vec{r}^{/O_i} \right) \right]$ et de $\vec{n}_{nm} = \frac{1}{k_T} \vec{\nabla} \wedge \left\{ \vec{\nabla} \wedge \left[\vec{r}^{/O_i} \Psi_{nm} \left(\vec{r}^{/O_i} \right) \right] \right\}$ dans lesquels nous introduisons la substitution $\vec{r}^{/O_i} = \vec{r}_j^{/O_i} + \vec{r}^{/O_j}$, nous obtenons les expressions des vecteurs déplacements dans la base centrée sur O_i comme une combinaison linéaire des vecteurs déplacements dans la base centrée sur O_j par²¹ :

$$\begin{aligned} \vec{l}_{inm}^{(3)} &= \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v A_{v\mu}^{nm} \left(\vec{r}_j^{/O_i} \right) \vec{l}_{jv\mu}^{(1)} \\ \vec{m}_{inm}^{(3)} &= \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v B_{v\mu}^{nm} \left(\vec{r}_j^{/O_i} \right) \vec{m}_{jv\mu}^{(1)} + C_{v\mu}^{nm} \left(\vec{r}_j^{/O_i} \right) \vec{n}_{jv\mu}^{(1)} \\ \vec{n}_{inm}^{(3)} &= \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v C_{v\mu}^{nm} \left(\vec{r}_j^{/O_i} \right) \vec{m}_{jv\mu}^{(1)} + B_{v\mu}^{nm} \left(\vec{r}_j^{/O_i} \right) \vec{n}_{jv\mu}^{(1)} \end{aligned}$$

Nous affectons d'un indice supplémentaire i ou j les vecteurs $\vec{l}_{nm}$, $\vec{m}_{nm}$ et $\vec{n}_{nm}$ pour faire apparaître la base dans laquelle ils sont exprimés, la base centrée en O_i ou en O_j .

Ce qui nous permet d'exprimer les relations matricielles entre les coefficients de décompositions harmoniques dans les bases centrées sur O_i et O_j par :

$$\begin{bmatrix} A_{inm}^{diff} \\ B_{inm}^{diff} \\ C_{inm}^{diff} \end{bmatrix}_{/O_j} = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v S_{nm}^{v\mu} \left(\vec{r}_j^{/O_i} \right) \begin{bmatrix} A_{iv\mu}^{diff} \\ B_{iv\mu}^{diff} \\ C_{iv\mu}^{diff} \end{bmatrix}_{/O_i} \quad (1.05-7)$$

avec

$$S_{nm}^{v\mu} \left(\vec{r}_j^{/O_i} \right) = \begin{vmatrix} A_{nm}^{v\mu} \left(\vec{r}_j^{/O_i} \right) & 0 & 0 \\ 0 & B_{nm}^{v\mu} \left(\vec{r}_j^{/O_i} \right) & C_{nm}^{v\mu} \left(\vec{r}_j^{/O_i} \right) \\ 0 & C_{nm}^{v\mu} \left(\vec{r}_j^{/O_i} \right) & B_{nm}^{v\mu} \left(\vec{r}_j^{/O_i} \right) \end{vmatrix}$$

Les expressions des coefficients $A_{v\mu}^{nm}$, $B_{v\mu}^{nm}$ et $C_{v\mu}^{nm}$ ainsi que quelques détails de calcul sont données en annexe 5.

²¹ Cruzan O., 'Translational addition theorems for spherical vector wave functions' Quart.Appl.Math. 20, 33-40 (1962)

1.05-2-b MODELE DE LA MATRICE MULTICENTREE

Les coefficients de la décomposition en harmoniques sphériques de l'onde diffusée par l'inclusion placée en $\vec{r}_j$ s'expriment donc par l'équation matricielle :

$$\begin{bmatrix} A_{jnm}^{diff} \\ B_{jnm}^{diff} \\ C_{jnm}^{diff} \end{bmatrix} = T_{jn} \begin{bmatrix} A_{jnm}^{exc} \\ B_{jnm}^{exc} \\ C_{jnm}^{exc} \end{bmatrix}$$

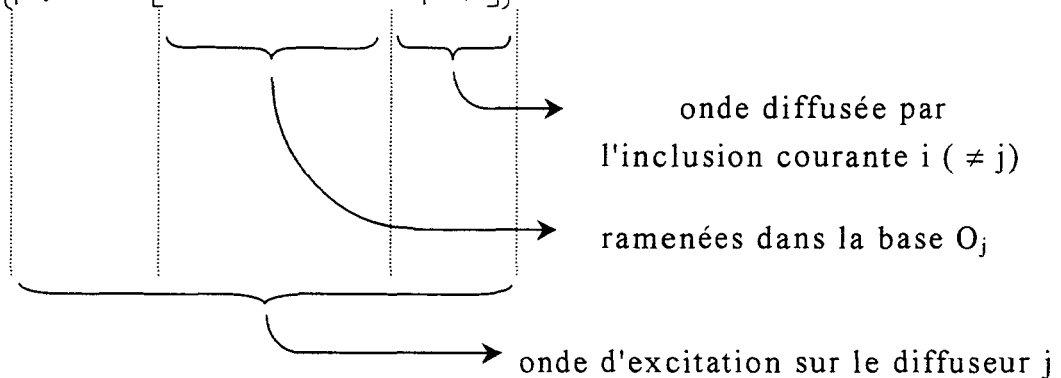
où $\begin{bmatrix} A_{jnm}^{exc} \\ B_{jnm}^{exc} \\ C_{jnm}^{exc} \end{bmatrix}$ représente les coefficients de décomposition, dans le base centré sur O_j , de

l'onde d'excitation sur le diffuseur placé en $\vec{r}_j$.

T_{jn} est la matrice de diffusion associée au diffuseur placé en $\vec{r}_j$.

En exprimant l'onde d'excitation par les ondes diffusée par toutes les autres inclusions, nous obtenons la formulation :

$$\begin{bmatrix} A_{jnm}^{diff} \\ B_{jnm}^{diff} \\ C_{jnm}^{diff} \end{bmatrix} = T_{jn} \left\{ \begin{bmatrix} A_{jnm}^{inc} \\ B_{jnm}^{inc} \\ C_{jnm}^{inc} \end{bmatrix} + \sum_{i \neq j}^N \left[\sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v S_{nm}^{v\mu}(\vec{r}_j/O_i) \begin{bmatrix} A_{iv\mu}^{diff} \\ B_{iv\mu}^{diff} \\ C_{iv\mu}^{diff} \end{bmatrix} \right] \right\} \quad (1.05-8)$$



Où tous les coefficients des décompositions harmoniques sont exprimés dans les bases relatives aux centres des inclusions.

Nous obtenons la même formulation pour toutes les inclusions présentes dans la matrice.

Lim et Hackman²² regroupent les coefficients de décomposition harmonique des ondes diffusées ou incidentes sur toutes les inclusions en vecteurs X_{MC}^{diff} et X_{MC}^{inc} , et tronquent à l'ordre P la somme infinie sur v. Ils expriment l'équation 1.05-8 sous la forme matricielle :

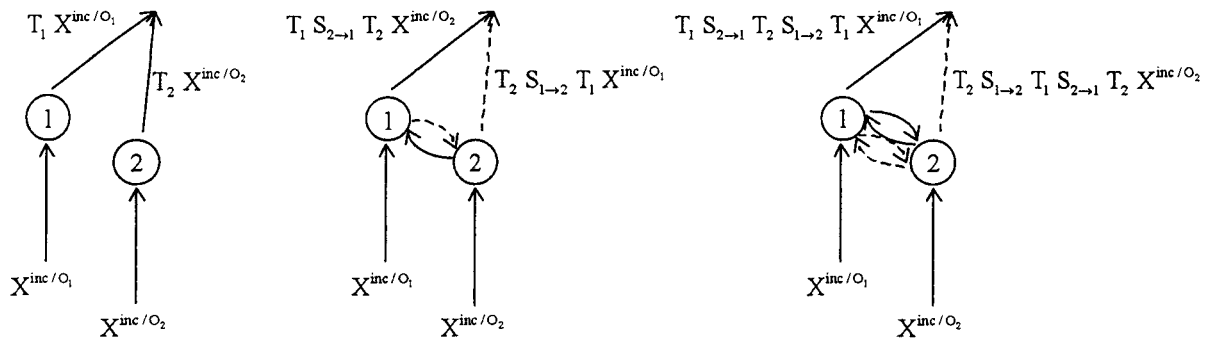
$$\begin{aligned} X_{MC}^{diff} &= T \{ X_{MC}^{inc} + S X_{MC}^{diff} \} \Rightarrow X_{MC}^{diff} = (T^{-1} - S)^{-1} X_{MC}^{inc} \\ &= T_{MC} X_{MC}^{inc} \end{aligned} \quad (1.05-9)$$

Tous les coefficients de décompositions sont exprimés dans les bases relatives aux centres de chaque inclusion.

T est une matrice reliant la totalité des coefficients de décomposition en harmoniques sphériques des ondes diffusées par toutes les inclusions aux coefficients des ondes d'excitations. De même la matrice S relie tous les coefficients de décomposition aux coefficients translatés pour toutes les inclusions. Les détails du calcul sont donnés en annexe 6.

L'interprétation de l'équation 1.05-9 est aisée en l'exprimant sous la forme suivante, dans laquelle chaque terme représente un ordre de diffusion :

$$X_{MC} = (T^{-1} - S)^{-1} X_{MC}^{inc} = \frac{T}{I - ST} X_{MC}^{inc} = T X_{MC}^{inc} + TST X_{MC}^{inc} + TSTST X_{MC}^{inc} + \dots \quad (1.05-10)$$



La puissance de la formulation de la diffusion par la matrice multicentrée réside dans la facilité à introduire de façon indépendante les caractéristiques de diffusion de chaque diffuseur.

²² Lim R., Hackman R.H. , 'A formulation of multiple scattering by many bounded obstacles using a multicentered, T supermatrix' J. Acoust.Soc.Am. 91, (2), p613-638, feb 1992

L'ordre de la troncature, P doit être de l'ordre de $k_{L0}d_M$, où d_M est la distance la plus grande entre deux inclusions. L'évaluation de la matrice T_{MC} , de taille $N(P+1) \times N(P+1)$, paraît donc rédhibitoire par le nombre de calculs qu'elle nécessite et la somme de connaissances sur le milieu qu'elle requiert, positions de chaque inclusion, taille, constitution. Ce nombre de calculs peut être réduit s'il apparaît des périodicités dans les positions des inclusions. Ce cas est traité par Lim et Hackmann. Le cas où les positions des inclusions sont aléatoires peut être résolu par un traitement statistique, c'est généralement à ce traitement que l'on fait référence quand on évoque la théorie de la diffusion multiple.

1.05-3 INTERPRETATION PAR LA THEORIE GEOMETRIQUE DE LA DIFFRACTION

1.05-3-a THEORIE GEOMETRIQUE DE LA DIFFRACTION POUR UNE SPHERE

Supposons pour cette partie que le milieu matrice est un fluide ne pouvant être le support à des ondes transversales. La matrice T_n se réduit alors à l'élément T_n^{11} . Il est obtenu en calculant le rapport de deux déterminants $D_n^{[1]}$ et $D_n^{[2]}$. Ces déterminants apparaissent naturellement quand on résout les équations de continuités par la méthode de Cramer.

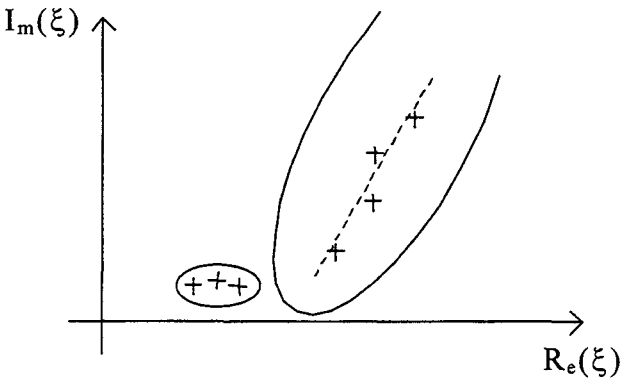
La vitesse particulière à l'extérieur du diffuseur peut alors s'exprimer, en supposant une vitesse particulière incidente unité, par :

$$v_T = v_{inc} + v_{diff}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \sqrt{\frac{\pi}{2 k_{L0} r}} \left[J_{n+\frac{1}{2}}(k_{L0} r) + \frac{D_n^{[1]}}{D_n^{[2]}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(k_{L0} r) \right] P_n(\cos \theta)$$

J et $H^{(1)}$ représentent les fonctions de Bessel et de Hankel de 1^{er} espèce classiques.

La somme discrète est ramenée à une intégrale dans le plan complexe par la transformée de Sommerfeld-Watson²³ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2} \int_C f(\xi, x) \frac{e^{-i\pi\xi}}{\cos \pi\xi} d\xi$$


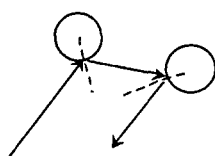
Le contour C est choisi de façon à séparer les contributions de différents types d'ondes donnés par les zéros ξ_s de $D_{\xi-\frac{1}{2}}^{[2]}$. Les parties réelles et imaginaires de ξ_s permettent d'obtenir les vitesses de phase, de groupe, les angles d'excitation et les atténuations des ondes correspondantes.

1.05-3-b COUPLAGE ENTRE DEUX SPHERES

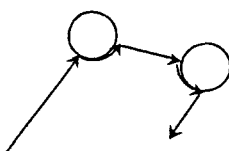
Sessarego, Folacci et Rossi²⁴ se sont intéressés aux contributions des couplages entre ondes réfléchies, des couplages entre ondes circonférentielles et des couplages mixtes entre ondes réfléchies et circonférentielles.

²³ Derem A., 'Théorie de la matrice S et transformation de Sommerfeld-Watson dans la diffusion acoustique', La diffusion acoustique par des cibles élastiques de formes géométriques simples. N.Gespa (ed). Cedocar, Paris 1987, pp281-310

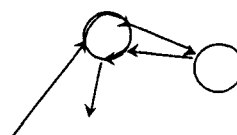
²⁴ Folacci A., Rossi J.-L., Sessarego J.-P., 'GTD analysis of scattering by two elastic spheres', Acustica. acta acustica, vol 83, pp93-104, 1997



Couplages entre ondes réfléchies



Couplages entre ondes circonférentielles

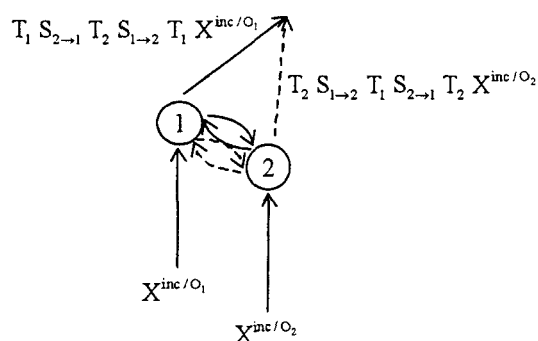
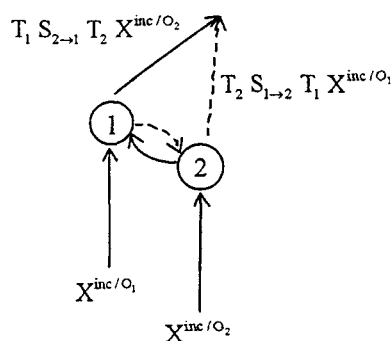
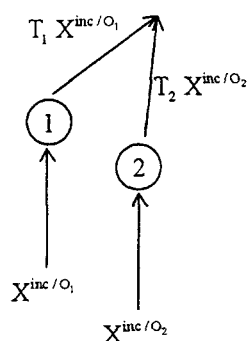


Couplage mixte entre ondes réfléchies et ondes circonférentielles

Il apparaît, en vue de leurs résultats de simulation, que les ondes circonférentielles apportent une contribution prépondérante lors du couplage mixte en configuration éclipse des sphères (lorsqu'une des sphères se trouve dans "l'ombre acoustique" de l'autre).

1.05-3-c INTERPRETATION DE LA DIFFUSION MULTIPLE PAR LA THEORIE GEOMETRIQUE DE LA DIFFRACTION

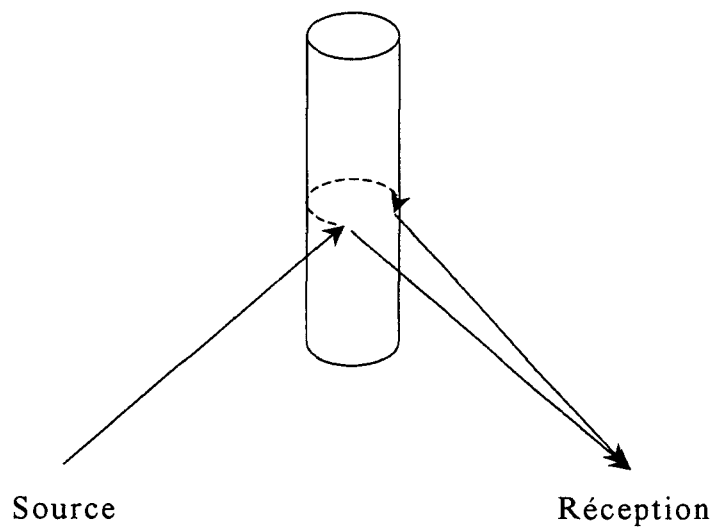
Connaissant les positions et les caractéristiques mécaniques de toutes les inclusions sphériques, ainsi que l'onde incidente dans le milieu insonifié, la connaissance de la matrice T_{MC} permet de calculer les coefficients des décompositions en harmoniques sphériques de toutes les ondes diffusées par l'équation 1.05-9. Les valeurs de la fréquence qui annule le déterminant de cette matrice multicentrée nous renseignent sur les résonances du milieu. L'analyse des couplages entre deux sphères faite par la théorie géométrique de la diffraction apporte une compréhension supplémentaire aux schémas explicatifs issus de l'équation 1.05-10 que nous rappelons :



Les matrices T_j représentent toutes les ondes diffusées, y compris les ondes circonférentielles. Les matrices $S_{i \rightarrow j}$ représentent les propagations de toutes ces ondes vers toutes les autres hétérogénéités présentes dans le milieu. On peut s'attendre à obtenir la somme d'un nombre important d'ondes au point d'observation.

Le déphasage entre ces ondes joue un rôle fondamental dans le phénomène de propagation. Il est lié aux temps de vol de chaque onde diffusée.

V. Detti²⁵ fait le calcul des temps de vols de toutes les ondes diffusées par un cylindre et n'observe que de faibles différences (<1%).



Il est cependant raisonnable de penser que l'écart entre les temps de vol entre deux points du milieu se creusera dans le cas d'un grand nombre d'hétérogénéités.

²⁵ Detti V., *'Théorie géométrique de la diffraction appliquée à la caractérisation expérimentale des propriétés acoustiques et dimensionnelles de la diaphyse osseuse.'*, p80-86, thèse de doctorat, Université de Nancy 1, oct 2000

1.05-4 MODELE DE FOLDY

Dans le cas où la taille des hétérogénéités est très faible devant la longueur d'onde. Les diffuseurs sont considérés comme ponctuels et la diffusion ne privilégie pas de directions particulières, on la qualifie d'isotrope. C'est dans ce cadre que Foldy²⁶ introduit le traitement statistique de la diffusion.

Nous exposerons rapidement cette théorie.

1.05-4-a EQUATION DE LA DIFFUSION MULTIPLE

Dans le cas d'une suspension de faible concentration et de la diffusion isotrope :

✓ en supposant que le milieu matrice, fluide, ne puisse être le support d'ondes transversales, les matrices de types T_{jn} se réduisent à un scalaire $g_j = g(s_j)$, s_j étant un paramètre caractéristique de diffusion par le diffuseur j seul.

✓ la concentration étant faible, les diffuseurs sont très éloignés les uns des autres. En utilisant le développement asymptotique des fonctions de Hankel sphériques,

$h_n(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \frac{e^{i\left[z - (n+1)\frac{\pi}{2}\right]}}{z}$, la propagation des déplacements entre $\vec{r}_j$ et $\vec{r}_i$ dans le fluide s'exprime simplement par $E(\vec{r}_j, \vec{r}_i) = \frac{e^{ik_L |\vec{r}_j - \vec{r}_i|}}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}$.

Foldy introduit l'équation fondamentale de la diffusion multiple (1.05-6) sous la forme :

$$\bar{u}(\vec{r}) = \bar{u}^{inc}(\vec{r}) + \sum_{j=1}^N g_j \bar{u}^{exc}(\vec{r}_j) E(\vec{r}, \vec{r}_j) \quad (1.05-11)$$

$$\bar{u}^{exc}(\vec{r}_j) = \bar{u}^{inc}(\vec{r}_j) + \sum_{k=1, k \neq j}^N g_k \bar{u}^{exc}(\vec{r}_k) E(\vec{r}_j, \vec{r}_k) \quad (1.05-12)$$

où $\bar{u}^{exc}(\vec{r}_j) = \bar{u}^{ext}(\vec{r}_j) - \bar{u}^{diff}(\vec{r}_j)$ représente le champ d'excitation sur le diffuseur placé en $\vec{r}_j$. Il se compose de l'onde plane incidente et des contributions de toutes les ondes diffusées par les diffuseurs autres que j .

²⁶ Foldy L.L., 'The multiple scattering of waves', Phy. Rev. vol 67, n°3-4, p 107-119, feb 1945

1.05-4-b TRAITEMENT STATISTIQUE :

Soit $P(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, s_1, s_2, \dots, s_N) d\vec{r}_1^3 d\vec{r}_2^3 \dots d\vec{r}_N^3 ds_1 ds_2 \dots ds_N$, la probabilité de trouver les diffuseurs dans une configuration telle que :

- un diffuseur de paramètre de diffusion compris entre s_1 et s_1+ds_1 se trouve dans l'élément de volume $d\vec{r}_1^3$ autour de $\vec{r}_1$,
- un diffuseur de paramètre de diffusion compris entre s_2 et s_2+ds_2 se trouve dans l'élément de volume $d\vec{r}_2^3$ autour de $\vec{r}_2$,
- ...
- un diffuseur de paramètre de diffusion compris entre s_N et s_N+ds_N se trouve dans l'élément de volume $d\vec{r}_N^3$ autour de $\vec{r}_N$.

La moyenne configurationnelle d'une fonction f dépendant de la position des diffuseurs et de leurs paramètres de diffusion est définie par :

$$\langle f \rangle = \int \dots \int f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, s_1, \dots, s_N) P(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, s_1, \dots, s_N) d\vec{r}_1^3 \dots d\vec{r}_N^3 ds_1 \dots ds_N$$

Nous noterons de même $\langle f \rangle_j$ la moyenne configurationnelle partielle de la fonction f effectué sur l'ensemble des diffuseurs excepté celui se trouvant en $\vec{r}_j$.

Ainsi, appliquée à l'équation 1.05-11 :

$$\langle \vec{u}(\vec{r}) \rangle = \vec{u}^{inc}(\vec{r}) + \int \langle g(\vec{r}_j) \rangle \langle \vec{u}^{exc}(\vec{r}_j) \rangle_j E(\vec{r}, \vec{r}_j) d\vec{r}_j \quad (1.05-13)$$

avec

- $\langle g(\vec{r}_j) \rangle = \int g(s) n(\vec{r}_j, s) ds$
- $n(\vec{r}_j, s) ds$ étant le nombre moyen de diffuseurs par unité de volume autour de $\vec{r}_j$.

L'homogénéisation du milieu est ici effectuée par la moyenne configurationnelle. L'onde $\langle \vec{u}(\vec{r}) \rangle$ est appelée onde cohérente et ses caractéristiques de propagation sont celles du milieu homogénéisé. Elle est mesurable en calculant la valeur moyenne des mesures effectuées sur un grand nombre de configurations.

Le terme $G(\vec{r}_j) \langle \vec{u}^{exc}(\vec{r}_j) \rangle_j E(\vec{r}, \vec{r}_j)$ représente la contribution en $\vec{r}$ de l'onde diffusée par un diffuseur fictif de propriété diffusante moyenne $G(\vec{r}_j)$ placé en $\vec{r}_j$ et soumis à la moyenne des ondes diffusées par tous les autres diffuseurs pouvant occuper la

totalité de l'espace disponible. Cette contribution est alors moyennée sur toutes les positions accessibles du diffuseur fictif.

Une approximation importante est introduite à ce stade. Le champ d'excitation moyen $\langle \bar{u}^{\text{exc}}(\bar{r}_j) \rangle_j$ est inconnu. Foldy propose de le remplacer par la moyenne de l'onde totale $\bar{u}'(\bar{r}_j)$ qui serait présente en $\bar{r}_j$ en l'absence du diffuseur et de ses effets. Pour un grand nombre de diffuseurs, il est ensuite admis que $\langle \bar{u}'(\bar{r}_j) \rangle \approx \langle \bar{u}(\bar{r}_j) \rangle$.

L'équation 1.05-13 s'écrit alors :

$$\langle \bar{u}(\bar{r}) \rangle = \bar{u}^{\text{inc}}(\bar{r}) + \int \langle g(\bar{r}') \rangle \langle \bar{u}(\bar{r}') \rangle E(\bar{r}, \bar{r}') d\bar{r}' \quad (1.05-14)$$

Appliquant l'opérateur $\nabla^2 + k_{L0}^2$ à l'équation 1.05-14 nous obtenons la relation de dispersion :

$$k_L^2(\bar{r}) = k_{L0}^2 + 4\pi \langle g(\bar{r}) \rangle \quad (1.05-15)$$

1.05-4-c SENS DE L'APPROXIMATION $\langle \bar{u}^{\text{exc}}(\bar{r}_j) \rangle_j \approx \langle \bar{u}'(\bar{r}_j) \rangle$

Comme l'équation 1.05-10, l'équation 1.05-12 représente tous les ordres de diffusion possibles. Elle peut être réécrite en explicitant $\bar{u}^{\text{exc}}(\bar{r}_j)$:

$$\begin{aligned} \bar{u}(\bar{r}) = & \bar{u}^{\text{inc}}(\bar{r}) + \sum_{j=1}^N g_j \bar{u}^{\text{inc}}(\bar{r}_j) E(\bar{r}, \bar{r}_j) \\ & + \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j} g_j g_k \bar{u}^{\text{inc}}(\bar{r}_k) E(\bar{r}_j, \bar{r}_k) E(\bar{r}, \bar{r}_j) \\ & + \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j} \sum_{l \neq k} g_j g_k g_l \bar{u}^{\text{inc}}(\bar{r}_l) E(\bar{r}_k, \bar{r}_l) E(\bar{r}_j, \bar{r}_k) E(\bar{r}, \bar{r}_j) \\ & + \dots \end{aligned} \quad (1.05-16)$$

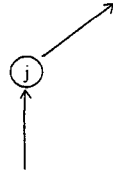
où, dans le dernier terme de la somme, l peut être égal à j.

L'hypothèse consistant à remplacer le champ d'excitation moyen $\langle \bar{u}^{\text{exc}}(\bar{r}_j) \rangle_j$ par l'onde moyenne $\langle \bar{u}'(\bar{r}_j) \rangle$ qui existerait en l'absence du diffuseur j, aboutit à la suppression des effets des ondes rétro-diffusées sur j (l ≠ j, dans le troisième terme de la somme et dans les suivants).

Par exemple, sur le schéma suivant, le cas de la diffusion d'ordre trois ne mettant en jeu que deux diffuseurs n'est pas pris en compte dans le traitement statistique.

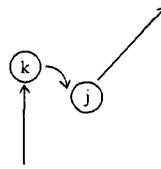
Diffusion simple

$$g_j \bar{u}^{inc}(\vec{r}_j) E(\vec{r}, \vec{r}_j)$$



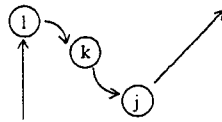
Diffusion double

$$g_j g_k \bar{u}^{inc}(\vec{r}_k) E(\vec{r}_j, \vec{r}_k) E(\vec{r}, \vec{r}_j)$$



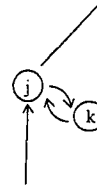
Diffusion triple entre 3 diffuseurs

$$g_j g_k g_l \bar{u}^{inc}(\vec{r}_l) E(\vec{r}_k, \vec{r}_l) E(\vec{r}_j, \vec{r}_k) E(\vec{r}, \vec{r}_j)$$



Diffusion triple entre 2 diffuseurs

$$g_j g_k g_j \bar{u}^{inc}(\vec{r}_j) E(\vec{r}_k, \vec{r}_j) E(\vec{r}_j, \vec{r}_k) E(\vec{r}, \vec{r}_j)$$



Ishimaru²⁷ calcule le nombre de termes diffusés intervenant dans le processus de diffusion multiple et le compare au nombre de termes diffusés sur lequel est effectué la statistique.

	Exact	Foldy	Différence
Diffusion simple	N	N	0
Ordre deux	N (N-1)	N (N-1)	0
Ordre trois	N (N-1) ²	N (N-1) (N-2)	$\frac{1}{N-1}$
Ordre quatre	N (N-1) ³	N (N-1) (N-2) (N-3)	$\frac{3N-5}{(N-1)^2}$

Bien qu'une quantité relativement faible d'ondes échappe au traitement statistique, il est difficile d'en mesurer les conséquences.

²⁷ Ishimaru A., 'Wave Propagation and scattering in random media', Academic Press, 1978, vol 2, p258

1.05-5 MODELE DE WATERMAN ET TRUELL

Waterman et Truell²⁸ généralisent les équations de Foldy au cas de la diffusion non isotrope et d'une concentration arbitraire de diffuseurs dans un fluide.

Ils fournissent un critère permettant d'évaluer les contributions des différents ordres de diffusion. La complexité des calculs est telle qu'ils doivent délaissier le caractère général de leur formalisation pour ne se consacrer qu'au cas de la diffusion isotrope dans le cadre de l'établissement du critère.

Les auteurs délimitent la région où les déphasages dus à la propagation entre les diffuseurs i et j n'excèdent pas π (1^{er} zone de Fresnel, hachuré sur la figure 1-14 suivante).

Dans ces conditions, l'onde rétro-diffusée s'exprime par :

$$\bar{u}_0(\bar{r}_j) = \sum_{k \neq j}^N g^2 \bar{u}'(\bar{r}_j) \frac{e^{2ik_{L0}|\bar{r}_k - \bar{r}_j|}}{|\bar{r}_k - \bar{r}_j|^2} \approx \frac{4\pi n_0}{ik_{L0}} g^2 \bar{u}'(\bar{r}_j) \quad (1.05-17)$$

où :

- $\bar{u}'(\bar{r}_j)$, représente l'onde totale qui serait présente en $\bar{r}_j$ en l'absence du diffuseur et de ses effets
- g , le coefficient de diffusion isotrope tel que $\bar{u}_j^{\text{diff}}(\bar{r}) = g \bar{u}_j^{\text{exc}}(\bar{r}_j) \frac{e^{ik_{L0}|\bar{r} - \bar{r}_j|}}{|\bar{r} - \bar{r}_j|}$
- n_0 , la densité de diffuseurs

Les ondes rétro-diffusées peuvent donc être négligées si le critère suivant est vérifié :

$$\frac{4\pi n_0}{h_0} |g|^2 \ll 1 \quad (1.05-18)$$

En se limitant ensuite à ce cas, mais en conservant l'anisotropie de la diffusion ils obtiennent la relation de dispersion :

$$\left(\frac{k_L}{k_{L0}} \right)^2 = \left[1 + \frac{2\pi n_0 g(0)}{k_{L0}^2} \right]^2 - \left[\frac{2\pi n_0 g(\pi)}{k_{L0}^2} \right]^2 \quad (1.05-19)$$

²⁸ Waterman P.C., Truell R., 'Multiple scattering of waves', Journal of mathematical Physics, Vol 2, n°4, july-august 1961

où $g(0)$ et $g(\pi)$ sont les amplitudes diffusées et rétro-diffusées en champ lointain. La fonction $g(\theta)$, appelée facteur de forme, peut être facilement calculée en identifiant les équations 1.05-1 et 1.05-17 en l'absence d'ondes transversales et pour le développement asymptotique des fonctions de Hankel sphérique de grands arguments :

$$g(\theta) = \frac{1}{ik_{L0}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) A_{n0} P_n^0(\cos\theta)$$

Soit :

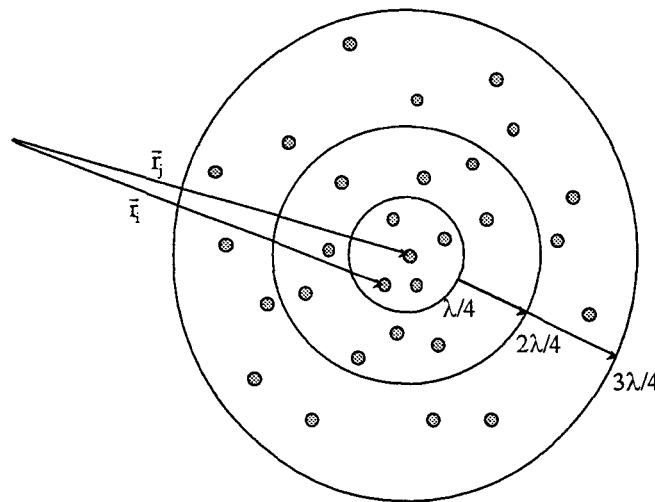
$$g(0) = \frac{1}{ik_{L0}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) A_{n0}$$

$$g(\pi) = \frac{1}{ik_{L0}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) A_{n0}$$

Une évaluation correcte de ces coefficients g peut être obtenue en tronquant ces sommes infinies à l'ordre $k_{L0}a^{29}$, a étant le diamètre des diffuseurs.

Mal et Bose³⁰ ont généralisé cette théorie à une matrice solide mais limitent leur étude dans une gamme de fréquence relativement basse ($k_{L0}a \leq 3$).

Figure 1-14 : 1^{re} zone de Fresnel autour du diffuseur j dans le cas de la diffusion isotrope



²⁹ Morse P.M., Feshbach H., 'Methods of theoretical physics', Mc Graw-Hill book company, inc, 1953, part 2, pp1483-1485,

³⁰ Mal A. K., Bose S. K., 'Dynamic elastic moduli of a suspension of imperfectly bonded spheres', Proc. Camb. Phil. Soc., vol 76, p 587-600, 1974

1.05-6 SIMULATION DU MODELE DE WATERMAN ET TRUELL POUR UNE CERAMIQUE D'HYDROXY APATITE POREUSE

La céramique d'hydroxy apatite poreuse est un milieu à pores communicants dans lequel on peut négliger les porosités occluses et piégées. Les deux phases communiquent et jouent donc un rôle similaire. On peut voir la céramique comme une matrice solide contenant des inclusions fluides, ou comme une matrice liquide contenant des inclusions solides. Dans les deux cas, les inclusions sont interconnectées. Par construction, seule la phase fluide est réalisée par une agglomération de sphères.

Nous présentons deux types de simulations basées sur le modèle de Waterman et Truell.

- Matrice fluide / inclusions solides

Le modèle de Waterman et Truell ne peut s'appliquer rigoureusement puisque les inclusions ne sont pas sphériques. Nous l'utiliserons en représentant les hétérogénéités solides par des inclusions sphériques équivalentes.

Leur rayon moyen a_e est calculé de façon à conserver la valeur de la porosité du milieu, $a_e = a_m \sqrt[3]{\frac{1-\beta}{\beta}}$.

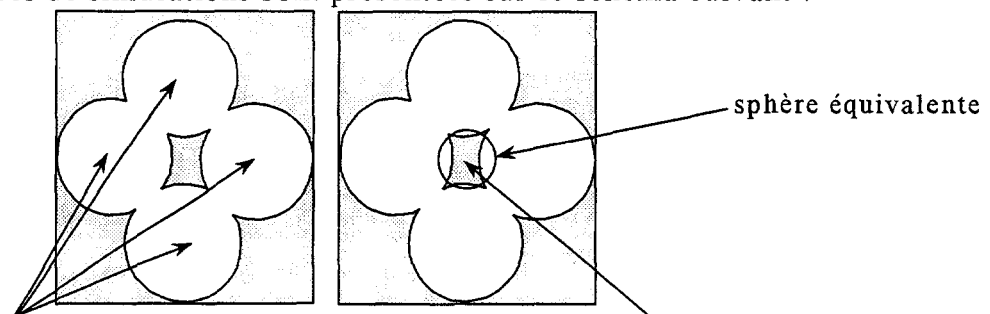
avec a_m , le rayon moyen des inclusions fluides.

Cette approche comporte un écart considérable avec les hypothèses de départ du fait de la non sphéricité de l'inclusion.

- Matrice solide / inclusions fluides

Le modèle de Waterman et Truell ne peut s'appliquer rigoureusement puisqu'il ne traite pas de la propagation d'ondes transversales dans la matrice. Nous l'utiliserons en calculant les coefficients $g(0)$ et $g(\pi)$ à partir des seuls termes T_n^{II} de la matrice de diffusion. Les conversions de modes entre les ondes longitudinales et transversales dans la matrice solide sont pris en compte dans le calcul du terme T_n^{II} , mais le phénomène de diffusion multiple pour ces ondes reconverties est ignoré.

Les deux possibilités de simulations sont présentées sur le schéma suivant :



Matrice solide/Inclusions sphériques fluides

Matrice fluide/Inclusion non sphérique solide

Nous reprenons les caractéristiques de l'hydroxy apatite et de l'eau déjà utilisées dans le paragraphe relatif aux simulations par le modèle de Biot :

La masse volumique de l'hydroxy apatite est de 3160 kg/m^3 , son module de Young et son coefficient de Poisson sont de 34 GPa et de 0,28. La porosité β de la céramique est de l'ordre de 70%, à 5% près. La masse volumique de l'eau est de 1000 kg/m^3 , la célérité des ondes longitudinales de 1500 m/s. Nous négligeons la viscosité de l'eau et la propagation dans l'eau des ondes transversales.

Le diamètre moyen a_m des pores est de $250 \text{ }\mu\text{m}$. Le nombre d'inclusions par unité de volume n_0 est donc $\frac{\beta}{\frac{1}{6}\pi a_m^3}$. Le diamètre moyen des inclusions solides sphériques

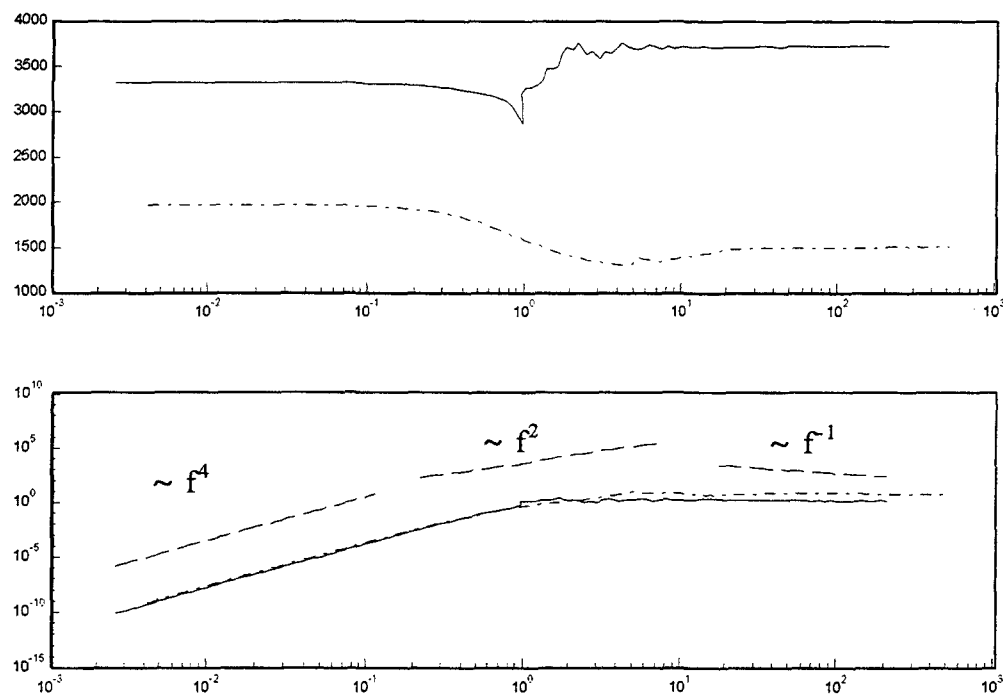
équivalentes a_e est de l'ordre de $190 \text{ }\mu\text{m}$ dans le modèle matrice fluide/inclusions solides.

Le cas de la diffusion simple fait apparaître trois domaines de dispersion :

- le domaine de Rayleigh, pour $k_L a_m \ll 1$
l'atténuation est proportionnelle à f^4
- le domaine stochastique, pour $k_L a_m \sim 1$
l'atténuation est proportionnelle à f^2
- le domaine haute fréquence, pour $k_L a_m \gg 1$
l'atténuation est proportionnelle à $1/f$

Nous présentons sur la figure 1-15 suivantes les célérités et les coefficients d'atténuation obtenus par les deux approches ainsi que ces trois asymptotes. Nous normalisons la fréquence par la taille des pores devant la longueur d'onde de l'onde longitudinale dans le milieu, soit en abscisse, la fréquence réduite $k_L a_m$.

Figure 1-15 : célérités et coefficients d'atténuation par le modèle de Waterman et Truell



Célérités (m/s) et coefficients d'atténuation (Np/mm)
 en fonction de la fréquence normalisée $k_L a_m$
 modèle matrice fluide/inclusions solides (-----)
 modèle matrice solide/inclusions fluides (————)
 asymptotes dans le cas de la diffusion simple (-----)

Nous obtenons deux célérités très différentes, l'une, dont la valeur est proche de celle d'une onde se propageant dans le fluide, l'autre de celle d'une onde se propageant dans le solide.

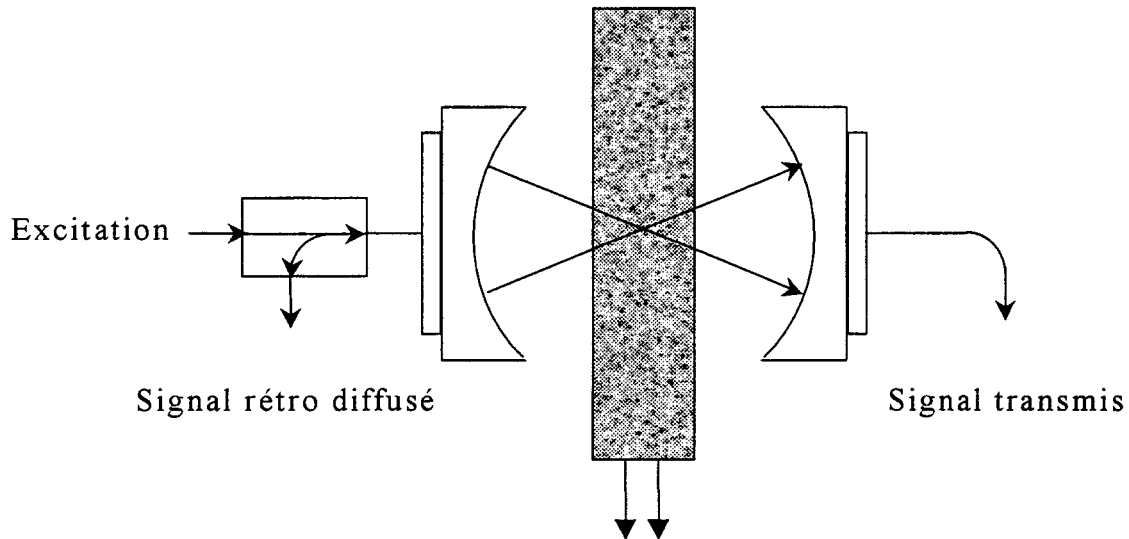
Les coefficients d'atténuation obtenus par les deux approches possèdent la même allure. Ils sont en bon accord avec l'évolution fréquentielle prévu par le modèle de diffusion simple en basse fréquence. Par contre leurs allures en haute fréquence présente une pente inférieure à celle prévue par la diffusion simple.

Les deux approches montrent des caractéristiques de propagation différentes de part et d'autre de la fréquence réduite unité ($k_L a_m = 1$).

Les simulations pour lesquelles nous avons choisi des porosités de 68% et de 72% sont indiscernables de celles présentées.

1.05-7 ASPECT EXPERIMENTAL

Chaffaï et al obtiennent un bon accord entre les mesures effectuées sur des os et les prédictions basées sur les théories de la diffusion. Les mesures sont effectuées en ondes focalisées et en régime impulsionnel.



L'échantillon est déplacé et les signaux moyennés. La relation de dispersion est obtenue par le calcul de la transformée de Fourier des signaux transmis ou réfléchis. Les auteurs s'intéressent à la loi d'évolution du niveau rétro diffusé³¹ et du coefficient d'atténuation³² avec la fréquence.

Le milieu osseux est modélisé par la présence d'un grand nombre d'hétérogénéités dans un fluide homogène. Les caractéristiques géométriques de ces hétérogénéités sont obtenues par une tomographie à rayonnement synchrotron. Le signal rétro diffusé est calculé dans le cadre de la diffusion simple.

La loi de puissance décrivant l'évolution fréquentielle du niveau rétro diffusé calculée est comparée à celle mesurée. Un bon accord est obtenu pour les simulations effectuées à partir d'hétérogénéités cylindriques :

$$V_{\text{simulé}} \% f^3$$

$$V_{\text{mesuré}} \% f^{3,38}$$

³¹ Chaffaï S., Roberjot V., Peyrin F., Berger G., Laugier P., 'Frequency dependence of ultrasonic backscattering in cancellous bone : Autocorrelation model and experimental results', J.Acoust.Soc.Am. 108 (5), Pt.1, pp 2403-2411, nov 2000

³² Chaffaï S., Padilla F., Berger G., Laugier P., 'In vitro measurement of the frequency-dependent attenuation in cancellous bone between 0,2 and 2 MHz', J.Acoust.Soc.Am. 108 (3), Pt.1, pp 1281-1289, sept 2000

1.06 APPLICABILITE ET UNIFICATION

1.06-1 VOLUME REPRESENTATIF ELEMENTAIRE

Les modèles rappelés précédemment traitent tous d'un milieu illimité. Ce n'est généralement pas le cas en pratique où l'atténuation des ondes acoustiques dans ces milieux ne permet pas de les sonder sur des épaisseurs importantes. Se pose alors la question suivante :

La mesure porte-t-elle sur un volume suffisamment important pour pouvoir valider les modèles ?

Une tentative de réponse est donnée par les statisticiens³³. Ils recherchent le plus faible volume de matériau permettant de représenter correctement un matériau illimité. Ce volume est appelé le volume représentatif élémentaire.

Son évaluation reste problématique et les avis de chacun ne convergent pas forcément vers le même ordre de grandeur pour un même milieu hétérogène.

1.06-2 APPLICABILITE DES MODELES

1.06-2-a MODELES DE DIFFUSION MULTIPLE

Le modèle de la matrice multicentree de Lim et Ackmann fournit une bonne représentation littérale des phénomènes mis en jeu lors de la propagation dans tout milieu présentant des inclusions sphériques fermées. On peut l'étendre au cas où les

³³ Par exemple

Ostoja-Starzewski M., '*Random field model of heterogenous materials*'

Int. J. Structures, vol 35, n°19, p 2429-2455, 1998

Eischen J. W., Torquato S., '*Determining elastic behavior of composites by the boundary element method*', J. Appl. Phys. Vol 74 (1), july 1993

Lemaitre J., Lacoche J.-L., Mechanics of solid materials.

Cambridge university Press, Cambridge

Drugan W. J., Willis J. R., '*A micromechanics-based nonlocal constitutive equation and estimates of representative volume element size for elastic composites*'

Journal of the mechanics and physic of solids, vol 44, p 497-524

inclusions sont en contact. Il est par contre très coûteux en calcul et sa mise en place n'est pas simple. Comme aucun traitement statistique n'est effectué, le calcul de l'onde diffusée nécessite la connaissance de la position de toutes les inclusions ainsi que celle de toutes leurs caractéristiques. Il ne peut donc être utilisé pratiquement comme modèle de simulation que dans des cas très particuliers ne faisant intervenir qu'un nombre restreint d'hétérogénéités sphériques.

La principale difficulté réside dans la lenteur de convergence observée lors de la translation des vecteurs déplacements diffusés par chaque inclusion. Il est possible de réduire quelque peu la taille de la matrice en remarquant que les sommes infinies apparaissant dans les éléments des matrices de diffusion et de translation peuvent être tronquées à des ordres différents mais cela reste insuffisant pour effectuer le calcul dans le cas d'un grand nombre d'inclusion. La contribution de Chew³⁴ à cet axe est essentielle.

Dans les modèles de Foldy et de Waterman et Truell, une étape supplémentaire est effectuée sur le plan littéral, celui de la moyenne configurationnelle. L'approximation effectuée à ce stade du calcul est assez confuse et paraît limiter l'ordre de diffusion. Waterman et Truell donnent le critère pour lequel l'équation de dispersion obtenue dans le cadre de la diffusion non isotrope est valide. Il en résulte que ce modèle n'est représentatif des suspensions de fortes concentrations que pour des inclusions peu diffusantes. Cette hypothèse est assez mal vérifiée dans la pratique pour une céramique d'hydroxy apatite poreuse. La contribution des ondes rétro-diffusées par chaque inclusion devrait en toute rigueur être introduite dans la relation de dispersion.

En tant qu'outil de simulation, seule la connaissance du facteur de forme est nécessaire.

Sur le plan expérimental, la mesure de l'onde cohérente, associée au milieu homogénéisé, est effectuée par la moyenne des signaux récoltés pour un grand nombre de réalisation du milieu.

Cela est facilement réalisable dans le cas d'une suspension de particules solides dans une matrice fluide, les particules solides étant continuellement en mouvement dans le fluide.

Cela peut poser un problème dans le cas des milieux poreux. Il est possible d'effectuer la moyenne des signaux obtenus en déplaçant l'échantillon dans le champ

³⁴ Wang Y.M., Chew W.C., 'A recursive of T-matrix approach for the solution of electromagnetic scattering by many spheres', IEEE trans. Antennas Propagat., vol 41, n°12, pp 1633-1639, 1993

acoustique. Il existe cependant des corrélations entre les positions des inclusions, l'onde cohérente risque d'être mal évaluée.

Les effets des corrélations entre les positions des inclusions seront présents dans les signaux récoltés. La description du phénomène de diffusion par la théorie géométrique de la diffraction permet d'interpréter ces signaux par la propagation d'ondes sur différents trajets, parvenant donc au transducteur avec des retards différents.

Une modification significative des caractéristiques de propagation apparaît lorsque la longueur d'onde est proche de la taille moyenne des inclusions. Il semble donc possible de l'évaluer assez facilement. Par contre, les simulations ne présentent pas une grande sensibilité à la concentration en inclusion qui devrait se révéler plus difficile à mesurer.

1.06-2-b MODELE DE BIOT

Le modèle de Biot est par construction radicalement différent des modèles précédents puisqu'il ne provient pas d'une analyse microscopique. Il est tout à fait satisfaisant dans la prise en compte des phénomènes physiques intervenant dans la propagation. La micro organisation du milieu est intégrée dans les valeurs à donner aux constantes ajustables qu'il utilise. Il se limite à la compréhension des milieux hétérogènes en basse fréquence et à porosité connectée. Son utilisation comme outil de simulation nécessite une mesure auxiliaire des constantes phénoménologiques. De nombreux auteurs ont recherché des méthodes de mesures de ces paramètres, mais ils ne sont pas tous accessibles. Les paramètres phénoménologiques apparaissent comme des facteurs ajustables permettant d'obtenir une bonne adéquation entre mesure et modèle.

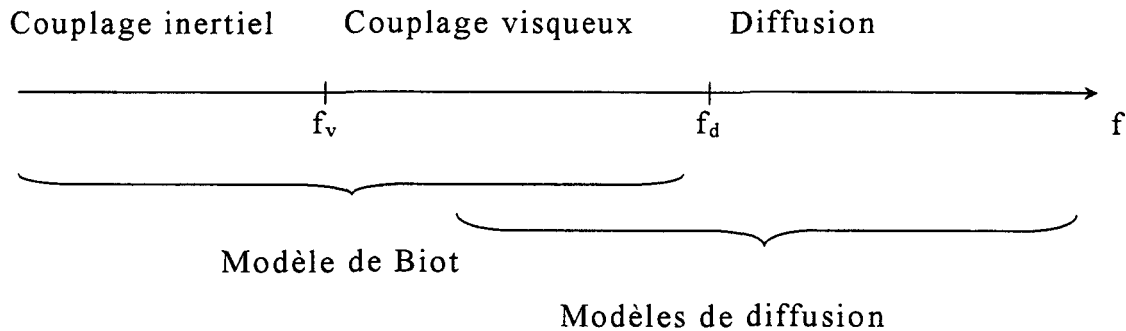
Au vu des courbes de simulation, le problème inverse n'a pas de solutions simples si les mesures ne sont pas effectuées sur toute la bande de fréquence admissible par ce modèle. Les célérités des ondes longitudinales lentes et rapides pouvant être relativement proches, il sera difficile de détecter les deux ondes sur un matériau de faible épaisseur.

La fréquence f_v délimite deux modes de propagation dans lesquels les couplages entre les deux phases se font soit par un entraînement visqueux, soit par un entraînement inertiel.

La fréquence f_d donne la limite d'un autre mode de propagation pour lequel la diffusion est prédominante. Dans la plus part des applications $f_d \gg f_v$.

Nous déclinons sur la figure 1-16 suivante les différents types de propagation et les modèles correspondant :

Figure 1-16 : *classement des différents types de propagation et des modèles correspondants*



1.06-3 UNIFICATION DES MODELES

Des tentatives d'unifications furent tentées. Schwartz et Johnson³⁵ obtiennent les caractéristiques du milieu effectif correspondant à des suspensions organisées en utilisant une méthode proche de celle de la matrice multicentree. Ils envisagent ensuite le cas de suspensions désorganisées et comparent différents modèles. Ils en déduisent une expression de la tortuosité à utiliser dans le modèle de Biot ainsi que de la densité effective du milieu.

Le passage de la suspension au milieu poreux ne semble pas évident. Alors que la concentration varie peu lors de l'interpénétration des inclusions, la microstructure change radicalement, puisque des interconnexions entre pores apparaissent. Cela permet la propagation sur de grandes distances (relativement à la taille des pores)

³⁵ Schwartz L.M., Johnson D.L., 'Long-wavelength acoustic propagation in ordered and disordered suspensions', Physical review B, vol 30, n°8, p 4302-4313, oct 1984

d'ondes 'guidées' par ces deux milieux. Sen et Johnson³⁶ étudient ce phénomène et montrent que l'apparition de l'onde longitudinale lente de Biot n'est pas représentée dans les théories de la diffusion multiple existantes. Johnson et Plona³⁷ donnent la confirmation expérimentale qu'effectivement, l'onde lente de Biot n'apparaît qu'après l'interpénétration des inclusions. Ils effectuent une première mesure sur un agglomérat de billes de verre non soudées, une seule onde est détectée en sortie du milieu. Une seconde mesure est réalisée après avoir soudé les billes, deux ondes sont observées en sortie du milieu. La distance moyenne entre billes et la concentration n'ont que très peu diminué entre les deux mesures.

Nous avons tenté d'adapter le modèle de Waterman et Truell au cas d'un milieu poreux à pores communicants. Cette tentative d'unification nous a amené à choisir deux approches de simulation. Ces deux approches, bien que construites sur des modèles de suspensions, permettent de décrire la propagation dans les deux phases. Cette esquisse plus intuitive que physique de la description de propagation dans les milieux poreux à pores communicants, nous amène à faire quelques hypothèses supplémentaire à celles déjà introduites par Waterman et Truell :

- Dans l'approche 'matrice solide/inclusion fluide' nous faisons l'hypothèse que la contribution à la diffusion multiple des conversions de modes entre ondes longitudinales et transversales est négligeable.
- Dans l'approche 'matrice fluide/inclusion solide', nous traitons une inclusion de forme non sphérique comme si elle l'était. La forme de l'inclusion est telle qu'il n'existe en général pas de fonction dérivable $r(\theta, \phi)$ permettant d'en décrire la surface. Cela peut entraîner une différence considérable entre la réalité et les résultats de simulation.

Nous avons donné les courbes présentant les limites des célérités des ondes longitudinales de Biot en utilisant les bornes supérieures et inférieures de Hashin et Shtrikman sur les coefficients élastiques. La célérité de l'onde rapide de Biot est comprise entre 2000 m/s et 4000 m/s dans la partie haute fréquence de Biot. Celle de l'onde lente est comprise entre 1400 m/s et 1300 m/s.

Dans la gamme basse fréquence du modèle de Waterman et Truell, la célérité obtenue par l'approche 'matrice solide/inclusion fluide', est en accord avec la théorie de Biot.

³⁶ Sen P.N., Johnson D.L., 'Topological limitation of effective-medium approximation in fluid-solid systems having two longitudinal-acoustic modes'

Physical review B, Condensed matter, third series, vol 27, n°6, 15 march 1983

³⁷ Jonhson D.L., Plona T.J., 'Acoustic slow waves and the consolidation transition'
J.Acoust.Soc.Am. 72 (2), p556-565, 1982

Ce n'est pas le cas de la célérité obtenue par l'approche 'matrice fluide/inclusion solide', qui, de l'ordre de 2000 m/s, est supérieure aux valeurs admissibles par la théorie de Biot. L'ordre de grandeur est toutefois respecté.

1.07 CONCLUSION

Le phénomène de propagation d'une onde acoustique dans un milieu poreux en basse fréquence est relativement bien représenté par la théorie de Biot. Le cas des suspensions est lui aussi relativement bien interprété par le modèle de Waterman et Truell si on peut négliger les effets des rétro diffusions. Il semble possible de l'appliquer à des suspensions de fortes concentrations. Ces deux théories paraissent alors susceptibles d'être appliquées aux milieux poreux. Néanmoins Johnson et Plona prouvent que la propagation de l'onde lente de Biot n'apparaît qu'en présence d'interpénétration des inclusions. Il paraît alors nécessaire de différencier deux types de milieux poreux, les agglomérats, types sables et les milieux consolidés, type os poreux pour lesquels les deux phases communiquent.

Les modèles de Biot, de Foldy ou de Waterman et Truell décrivent la propagation dans un milieu homogénéisé. Ils permettent d'associer les caractéristiques de propagation aux caractéristiques mécaniques du milieu homogénéisé. On parle alors de caractéristiques effectives du milieu hétérogène. Dans le cas du modèle de Biot, l'homogénéisation est effectuée par la première hypothèse : la longueur d'onde est très grande devant la taille des hétérogénéités. Dans les modèles de Foldy, ou de Waterman et Truell, le calcul de la moyenne configurationnelle permet d'homogénéiser les milieux, que la longueur d'onde soit petite ou pas devant la taille des hétérogénéités.

Aucune technique d'homogénéisation n'est effectuée dans le modèle de la matrice multicentree, qui est alors susceptible de mieux décrire un milieu contenant un petit nombre d'inclusions.

Nous utilisons les deux descriptions possibles d'un milieu poreux à pores communicants, matrice solide contenant des inclusions fluides ou matrice fluide contenant des inclusions solides. Le modèle de Waterman et Truell utilisé pour ces deux descriptions permet d'obtenir une assez bonne adéquation avec le modèle de Biot.

Chapitre 2. MODELISATION DU SYSTEME DE CARACTERISATION ACOUSTIQUE

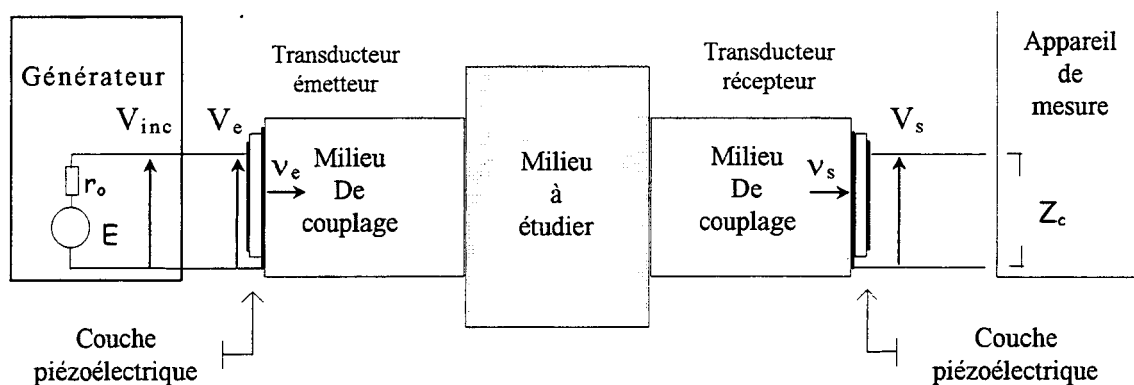
2.01 INTRODUCTION

La caractérisation ultrasonore d'un milieu débute par la mesure des paramètres de propagation, célérité et atténuation de l'onde, qui dépendent des caractéristiques mécaniques et géométriques du milieu. La seconde étape consiste à interpréter les valeurs obtenues à l'aide des modèles de propagation, ce qui permet de pouvoir remonter à quelques grandeurs caractéristiques du milieu.

Nous avons rappelé différents modèles de propagation dans les milieux hétérogènes, nous nous intéresserons maintenant à l'étude du système de mesure des paramètres de propagation.

Nous rappelons le principe de la caractérisation en transmission.

Figure 2-1 : schéma générique d'un système de caractérisation en transmission



Il est nécessaire d'utiliser une paire de transducteurs émetteur-récepteur pour transmettre et mesurer les perturbations mécaniques du milieu, et d'introduire un milieu de couplage entre les transducteurs et le milieu à étudier. Le milieu de couplage doit assurer le lien mécanique entre les transducteurs et le milieu à étudier. Nous prendrons ici de l'eau, le milieu étudié étant solide.

L'énergie électrique délivrée par le générateur est transférée à la couche piézo-électrique, puis convertie en énergie acoustique. Elle se propage dans le milieu de couplage avant d'être transférée au milieu étudié. L'onde acoustique, après avoir interagi avec le milieu, est transmise au milieu de couplage du transducteur récepteur puis est convertie en énergie électrique.

La mesure de la vitesse de propagation et de l'atténuation de l'onde acoustique se fait donc à partir de mesures électriques.

Il apparaît clairement dans ce processus que les caractéristiques de propagations de l'onde acoustique dans le milieu à étudier ne pourront être accessibles que si les effets liés aux conversions électro-acoustiques et aux milieux de couplages sont bien compris. Il est nécessaire de fournir une modélisation fidèle des signaux récoltés.

Nous introduisons une formulation générale du lien existant entre la tension incidente et la tension reçue, dans le cas du système schématisé par la figure 2-1 :

$$\begin{aligned} V_e &= T_{el} V_{inc} && \text{transmission électrique générateur} \rightarrow \text{transducteur émetteur} \\ v_e &= K_e V_e && \text{conversion électro-acoustique} \\ v_s &= T_{ac} v_e && \text{transmission acoustique transducteurs émetteur} \rightarrow \text{récepteur} \\ V_s &= K_r v_s && \text{conversion acousto-électrique} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_{21} = \frac{V_s}{V_{inc}} = K_r T_{ac} K_e T_{el} \quad (2.01-1)$$

M.Deblock³⁸ a mené l'étude d'un tel système de caractérisation au sein du laboratoire. Ce système, très performant, fonctionne en régime harmonique. La caractérisation du milieu est réalisée par la mesure à l'analyseur de réseau de la fonction de transfert S_{21} du système. Cette méthode de caractérisation tire son originalité et ses performances du choix du fonctionnement en régime harmonique. Nous la comparerons à d'autres méthodes de type impulsionnelle et préciserons ses intérêts et ses inconvénients pratiques dans le troisième chapitre. Initialement prévu pour la caractérisation de liquide viscoélastique en haute fréquence, nous l'avons adapté à la caractérisation de milieux solides dans une gamme de fréquence arbitraire. Nous montrerons que la caractérisation d'un milieu solide nécessite la mesure des trois paramètres S_{11} , S_{22} et S_{21} explicités en annexe 7.

³⁸Deblock Y., 'Caractérisation ultrasonore haute fréquence des propriétés viscoélastiques de milieux liquides', Thèse de doctorat, Université de Valenciennes, juin 1997

Notons que la modélisation rigoureuse du signal électrique récolté par l'appareil de mesure passe, quelle que soit la méthode de mesure retenue, par le calcul des coefficients de transmissions ou de conversions K_r , T_{ac} , K_e et T_{el} que nous venons d'introduire. Pour la méthode harmonique, nous retrouvons dans ces coefficients les effets des interférences entre toutes les ondes réfléchies aux interfaces. Cela complique notablement leurs expressions. Le but et l'originalité de ce chapitre est l'obtention des expressions littérales des paramètres S du système de mesure en fonction des caractéristiques intrinsèques des milieux traversés.

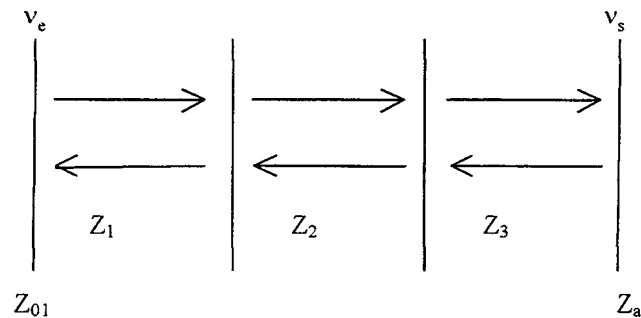
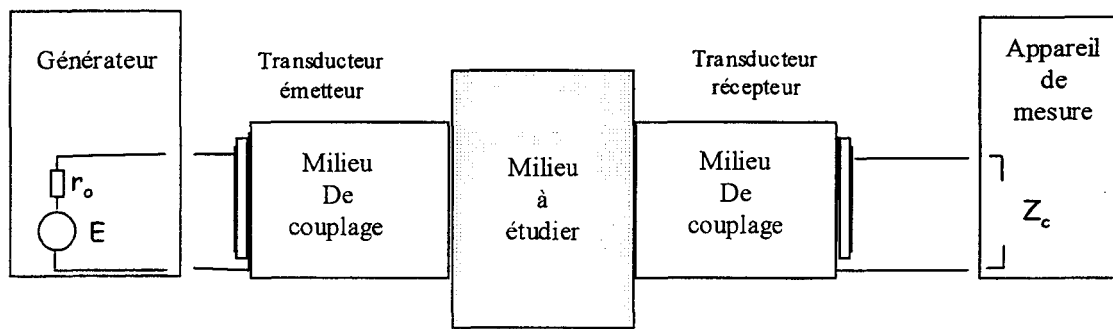
La première partie traitera de la propagation d'une onde acoustique sous incidence normale dans un milieu multicouche. Cette étude permettra en particulier d'évaluer les effets des milieux de couplage sur la mesure.

La seconde partie sera consacrée à la prise en compte de la transduction électro-acoustique dans la modélisation du système de mesure. Nous présenterons les équations d'une couche piézo-électrique dans le paragraphe 2.03-2, puis les équations des coefficients nécessaires à la modélisation du système de mesure dans le paragraphe 2.03-3. La mesure étant effectuée en régime harmonique, ces coefficients sont aussi représentatifs des ondes stationnaires existant dans les trois milieux. Nous montrerons dans les paragraphes suivants comment exprimer chacun de ces coefficients comme le produit d'un coefficient intrinsèque par un facteur décrivant les ondes stationnaires. Nous donnerons les expressions des paramètres S dans le paragraphe 2.04, puis présenterons leur sens physique dans le paragraphe 2.05. Nous terminerons ce chapitre par une simulation des paramètres S dans le paragraphe 2.06.

2.02 ETUDE DE LA PROPAGATION SOUS INCIDENCE NORMALE DANS UN MILIEU MULTICOUCHE

2.02-1 INTRODUCTION

Nous rappelons le schéma du système de mesure :



L'impédance électrique de l'appareil de mesure est ramenée aux points de connexions du transducteur récepteur, et constitue sa charge électrique Z_c . La couche piézo-électrique ainsi chargée présente sur sa surface réceptrice une impédance acoustique Z_a . Cette impédance est ramenée à la surface du transducteur émetteur par les couches d'impédances Z_3 , Z_2 et Z_1 .

Nous recherchons la relation entre les vitesses particulières en entrée et en sortie du milieu, et l'expression de l'impédance ramenée Z_{01} en surface du transducteur émetteur.

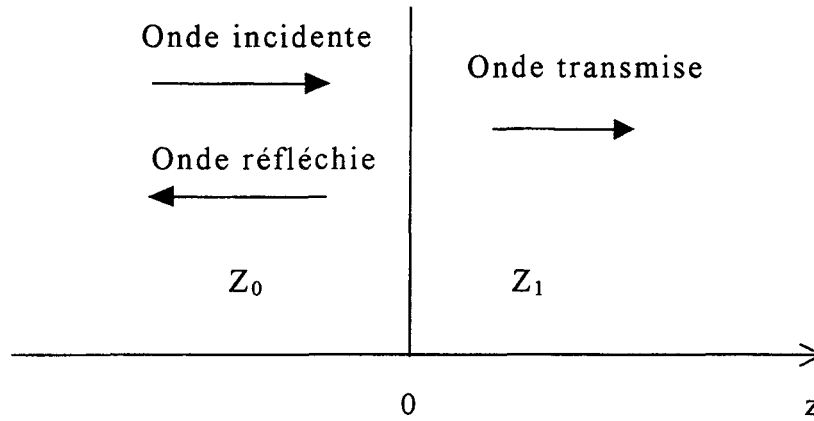
Nous définirons les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude et en énergie dans le paragraphe 2.02-2.

Nous introduirons les notions d'impédance ramenée à l'entrée d'une couche prise en sandwich par deux milieux semi-infinis dans le paragraphe 2.02-3.

Nous présenterons dans ce cas la relation existant entre les vitesses particulières en entrée et en sortie de la couche. L'étude d'un milieu multicouche, dans le paragraphe 2.02-4, en sera simplifiée puisque chaque couche pourra être réduite à une interface.

2.02-2 DEFINITION DES COEFFICIENTS DE REFLEXION ET DE TRANSMISSION

Soit une interface entre deux milieux semis infinis dont l'un constitue le support de propagation à une onde plane incidente, par exemple le milieu d'impédance Z_0 sur la figure suivante. La continuité des contraintes et des déplacements à l'interface impose l'apparition d'une onde réfléchie dans ce milieu et d'une onde transmise dans le milieu adjacent.



Nous sous-entendons le terme $e^{i\omega t}$ et posons :

$$\begin{aligned} v_0(z) &= v_0^+ e^{-i k_0 z} + v_0^- e^{i k_0 z} & v_1(z) &= v_1^+ e^{-i k_1 z} \\ \tau_0(z) &= -Z_0 (v_0^+ e^{-i k_0 z} - v_0^- e^{i k_0 z}) & \tau_1(z) &= -Z_1 v_1^+ e^{-i k_1 z} \end{aligned} \quad (2.02-1)$$

Les nombres d'ondes $k_{0/1}$ sont définis par $k_{0/1} = -i\alpha_{0/1} + 2\pi f/v_{0/1}$

$v_{0/1}$ et $\alpha_{0/1}$ représentent la célérité et l'atténuation de l'onde acoustique dans les milieux considérés, 0 ou 1.

La résolution des conditions de continuité $v_1(0) = v_0(0)$ et $\tau_1(0) = \tau_0(0)$ conduit à :

$$\begin{cases} r_{01}^{(v)} = \frac{v_0^-}{v_0^+} = \frac{Z_0 - Z_1}{Z_0 + Z_1} \\ t_{01}^{(v)} = \frac{v_1^+}{v_0^+} = \frac{2 Z_0}{Z_1 + Z_0} \end{cases} \quad (2.02-2)$$

Les coefficients $r_{01}^{(v)}$ et $t_{01}^{(v)}$ sont les coefficients de réflexion et de transmission de la vitesse de déplacement. Ils dépendent du sens de propagation de l'onde, les

indices 01 signifient que ces coefficients sont établis pour une onde se propageant du milieu d'impédance Z_0 vers le milieu d'impédance Z_1 .

La même démarche, appliquée à l'équation 2.02-1, dans laquelle les vitesses de déplacements particuliers sont décrites à partir des contraintes, conduit à la définition des coefficients de réflexion et de transmission de la contrainte.

$$\begin{cases} r_{01}^{(\tau)} = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_0 + Z_1} \\ r_{01}^{(v)} = \frac{2 Z_1}{Z_1 + Z_0} \end{cases} \quad (2.02-3)$$

Le calcul de la puissance de l'onde réfléchie permet d'introduire le coefficient de réflexion en énergie : $P_r \propto r_{01}^{(v)} r_{01}^{(\tau)} = \left(\frac{Z_0 - Z_1}{Z_0 + Z_1} \right)^2$. De même pour le coefficient de transmission en énergie : $P_t \propto t_{01}^{(v)} t_{01}^{(\tau)} = \frac{4 Z_0 Z_1}{(Z_0 + Z_1)^2}$. Le bilan d'énergie se traduit par :

$$r_{01}^{(v)} r_{01}^{(\tau)} + t_{01}^{(v)} t_{01}^{(\tau)} = 1$$

Nous ne conserverons pas par la suite ces quatre coefficients pour décrire la traversé d'une interface. Nous définissons les coefficients de réflexion et de transmission que nous qualifions de coefficients en amplitude par :

$$r_{01} = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} \text{ et } t_{01} = \frac{2 Z_0}{Z_0 + Z_1} \quad (2.02-4)$$

Ils vérifient $r_{01} + t_{01} = 1$ et $r_{01}^2 + t_{01} t_{10} = 1$.

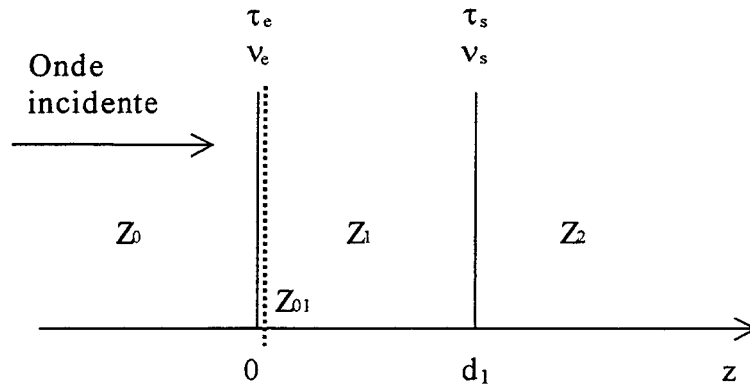
Dans le cas où le nombre d'interfaces est grand, cette méthode devient difficile à utiliser de par le nombre d'équations à résoudre. On préfère alors utiliser l'écriture matricielle pour décrire la propagation de l'onde. Ainsi, pour une onde se propageant dans un milieu homogène caractérisé par son impédance Z et par son nombre d'onde k , les contraintes et déplacements sur deux plans d'ondes placés en z_1 et en z_2 sont liés par l'équation 2.02-5 suivante :

$$\begin{vmatrix} \tau(z_1) \\ v(z_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -i Z \sin \theta \\ -i \frac{\sin \theta}{Z} & \cos \theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \tau(z_2) \\ v(z_2) \end{vmatrix} \quad (2.02-5)$$

où $\theta = k (z_2 - z_1) = -i\alpha(z_2 - z_1) + 2\pi f (z_2 - z_1) / v$

2.02-3 ÉTUDE D'UNE COUCHE PRISE EN SANDWICH ENTRE DEUX MILIEUX SEMI-INFINIS

La description acoustique d'une couche d'impédance Z_1 , prise en sandwich entre deux milieux semi-infinis d'impédances Z_0 et Z_2 peut se ramener à celle de deux milieux semi-infinis d'impédances Z_0 et Z_{01} . Z_{01} est appelée l'impédance ramenée en $z = 0$.



Nous recherchons l'expression de l'impédance ramenée, des coefficients de réflexion et de transmission à associer à la couche et de la relation entre les vitesses particulières en entrée et en sortie de la couche, en fonction des impédances caractéristiques des milieux.

2.02-3-a IMPEDANCE RAMENEE Z_{01}

$$\begin{vmatrix} \tau_e \\ v_e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta_1 & -i Z_1 \sin\theta_1 \\ -i \frac{\sin\theta_1}{Z_1} & \cos\theta_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \tau_s \\ v_s \end{vmatrix} \quad \text{où } \theta_1 = k_1 d_1 = -i \alpha_1 d_1 + 2\pi f d_1 / v_1$$

Le milieu d'impédance Z_2 est supposé être illimité pour $z \rightarrow \infty$, donc $\frac{T_s}{v_s} = -Z_2$.

$$\text{Ainsi : } \tau_e = - (Z_2 \cos\theta_1 + i Z_1 \sin\theta_1) v_s \text{ et } v_e = \frac{1}{Z_1} (Z_1 \cos\theta_1 + i Z_2 \sin\theta_1) v_s$$

L'impédance ramenée Z_{01} est définie par $Z_{01} = - \frac{T_e}{v_e}$. Nous obtenons :

$$Z_{01} = Z_1 \frac{1 + r_{12} e^{-2i\theta_1}}{1 - r_{12} e^{-2i\theta_1}} \quad (2.02-6)$$

2.02-3-b COEFFICIENTS DE TRANSMISSION ET DE REFLEXION

La traversée de la couche par l'onde incidente est décrite par les coefficients de réflexion et de transmission entre les milieux d'impédance Z_0 et Z_{01} . Ces coefficients ne présentent pas une dépendance simple aux impédances caractéristiques des milieux. Nous adoptons le formalisme suivant afin de les différencier des coefficients introduits précédemment :

Soient $\overline{t_{01}} = \frac{2Z_0}{Z_0 + Z_{01}}$ et $\overline{r_{01}} = \frac{Z_{01} - Z_0}{Z_{01} + Z_0}$ les coefficients de transmission et de réflexion

sur le plan d'entrée ($z = 0$).

Nous conserverons ces notations dans la suite. Un coefficient surmonté d'une barre signifie qu'il dépend des caractéristiques de propagation des milieux vers lesquels l'onde se propage.

En développant l'expression de Z_{01} , nous pouvons les mettre sous la forme:

$$\overline{t_{01}} = t_{01} \frac{1 - r_{12} e^{-2i\theta_1}}{1 - r_{10} r_{12} e^{-2i\theta_1}} \quad \text{et} \quad \overline{r_{01}} = r_{01} + \frac{t_{01} r_{12} t_{10} e^{-2i\theta_1}}{1 - r_{10} r_{12} e^{-2i\theta_1}} = \frac{r_{01} + r_{12} e^{-2i\theta_1}}{1 - r_{10} r_{12} e^{-2i\theta_1}} \quad (2.02-7)$$

Nous pouvons remarquer que $\overline{t_{01}} + \overline{r_{01}} = 1$.

2.02-3-c RELATION ENTREE-SORTIE

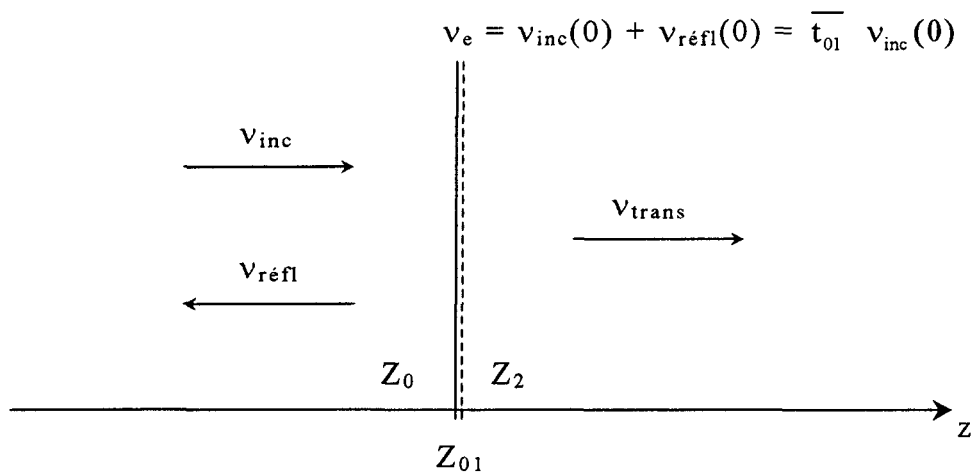
Connaissant v_e et $\tau_e (-Z_{01} v_e)$, nous en tirons v_s à partir de la relation matricielle (2.02-5) :

$v_s = v_e \left(\cos \theta_1 - i \frac{Z_{01}}{Z_1} \sin \theta_1 \right)$, puis en remplaçant Z_{01} par son expression :

$$\frac{v_s}{v_e} = \frac{t_{12} e^{-i\theta_1}}{1 - r_{12} e^{-2i\theta_1}} \quad (2.02-8)$$

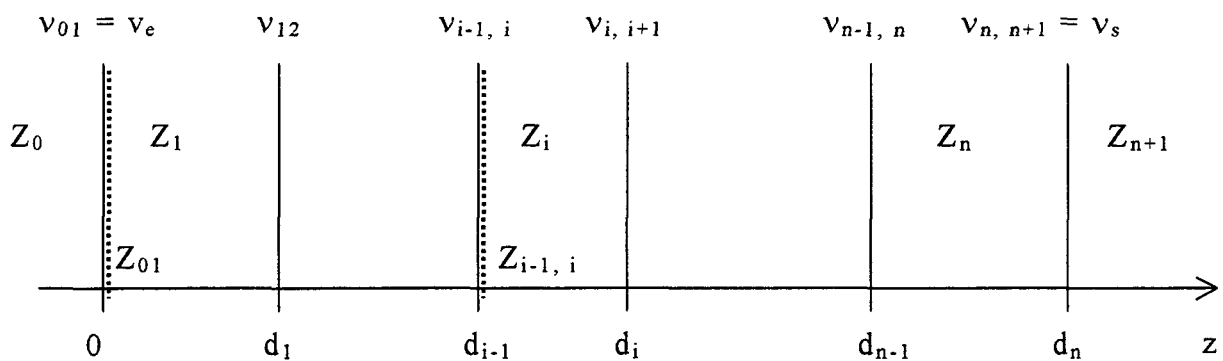
2.02-3-d FONCTION DE TRANSFERT

Nous pouvons calculer le champ de vitesse en $z=0$ par $v_e = \overline{t_{01}} v_{inc}$.



$$\text{d'où } \frac{v_s}{v_{inc}} = \frac{t_{01} t_{12} e^{-i\theta_1}}{1 - r_{10} r_{12} e^{-2i\theta_1}} \quad (2.02-9)$$

2.02-4 CAS D'UN MILIEU MULTICOUCHES



La méthode précédente est appliquée à un milieu constitué de n couches prises en sandwich entre deux milieux semi-infinis.

Nous obtenons, en appliquant le raisonnement précédent à la couche d'impédance Z_i :

$$Z_{i-1,i} = Z_i \frac{1 + \overline{r_{i,i+1}} e^{-2i\theta_i}}{1 - \overline{r_{i,i+1}} e^{-2i\theta_i}} \quad (2.02-10)$$

où :

- $\overline{r_{i,i+1}} = \frac{Z_{i,i+1} - Z_i}{Z_{i,i+1} + Z_i}$
- $\theta_i = k_i (d_i - d_{i-1})$
- k_i est le nombre d'onde associé à la couche d'impédance Z_i .

$$\text{puis } \frac{v_{i,i+1}}{v_{i-1,i}} = \frac{\overline{t_{i,i+1}} e^{-i\theta_i}}{1 - \overline{r_{i,i+1}} e^{-2i\theta_i}} \quad (2.02-11)$$

où :

$$\overline{t_{i,i+1}} = 1 - \overline{r_{i,i+1}}$$

La relation entrée-sortie du multicouche s'exprime alors par :

$$\frac{v_s}{v_e} = \prod_{i=1}^n \frac{\overline{t_{i,i+1}} e^{-i\theta_i}}{1 - \overline{r_{i,i+1}} e^{-2i\theta_i}} \quad (2.02-12)$$

La fonction de transfert peut être obtenue en substituant v_e par $\overline{t_{01}} v_{inc}$.

$$\frac{v_s}{v_{inc}} = \overline{t_{01}} \cdot \prod_{i=1}^n \frac{\overline{t_{i,i+1}} e^{-i\theta_i}}{1 - \overline{r_{i,i+1}} e^{-2i\theta_i}}$$

Nous pouvons ainsi caractériser la propagation dans les trois milieux du système expérimental. Il est cependant nécessaire de connaître le coefficient de réflexion à la surface du transducteur récepteur. En l'appelant r_{34} , nous obtenons :

$$\frac{v_s}{v_e} = T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \quad (2.02-13)$$

avec :

$$\blacksquare \quad T_1 = \frac{\overline{t_{12}} e^{-i\theta_1}}{1 - \overline{r_{12}} e^{-2i\theta_1}}, \quad T_2 = \frac{\overline{t_{23}} e^{-i\theta_2}}{1 - \overline{r_{23}} e^{-2i\theta_2}}, \quad T_3 = \frac{t_{34} e^{-i\theta_3}}{1 - r_{34} e^{-2i\theta_3}}$$

et :

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad Z_{01} &= Z_1 \frac{1 + \overline{r_{12}} e^{-2i\theta_1}}{1 - \overline{r_{12}} e^{-2i\theta_1}}, \quad \overline{r_{12}} = \frac{Z_{12} - Z_1}{Z_{12} + Z_1} \\ \blacksquare \quad Z_{12} &= Z_2 \frac{1 + \overline{r_{23}} e^{-2i\theta_2}}{1 - \overline{r_{23}} e^{-2i\theta_2}}, \quad \overline{r_{23}} = \frac{Z_{23} - Z_2}{Z_{23} + Z_2} \\ \blacksquare \quad Z_{23} &= Z_3 \frac{1 + r_{34} e^{-2i\theta_3}}{1 - r_{34} e^{-2i\theta_3}} \end{aligned} \quad (2.02-14)$$

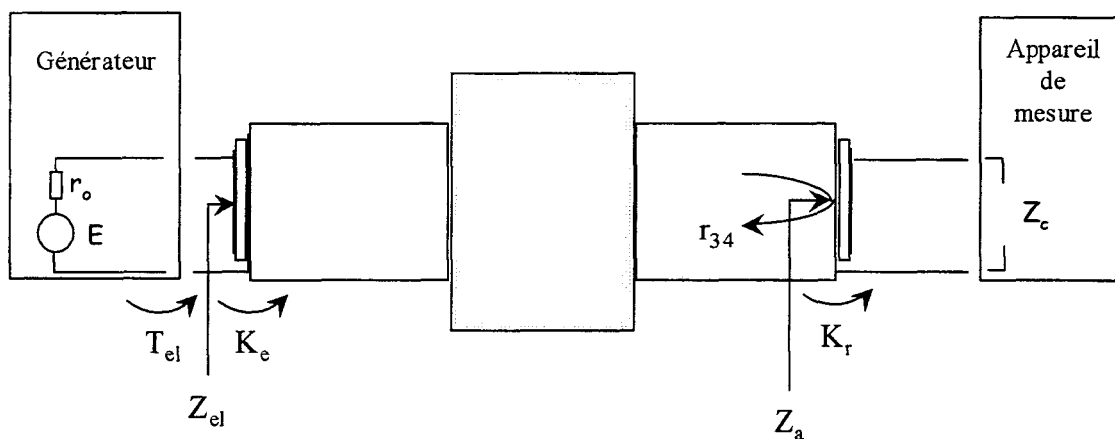
Les expressions détaillées sont données en annexe 8.

2.03 PARAMETRES LIES A LA TRANSDUCTION

2.03-1 INTRODUCTION

Le but de cette partie est d'exprimer les paramètres S du système de mesure en fonction des impédances caractéristiques, des vitesses et atténuations de l'onde dans chaque milieu et des caractéristiques des deux transducteurs chargés par des milieux semi-infinis. Nous cherchons à factoriser dans l'expression des paramètres S , les termes relatifs à la transduction, des termes relatifs à la propagation dans les différents milieux. Les expressions de l'impédance ramenée Z_{01} et de la relation entrée-sortie v_s/v_e obtenues précédemment nous seront d'une grande utilité.

Nous rappelons sur le schéma suivant les grandeurs à déterminer :



Nous commencerons, dans le paragraphe 2.03-2, par présenter les équations d'une couche mince piézo-électrique. Associées aux conditions aux limites adéquates, nous en tirerons, dans le paragraphe 2.03-3, les relations générales caractéristiques de la transduction électro-acoustique et acousto-électrique.

Nous donnerons, dans le paragraphe 2.03-4, les expressions de l'impédance électrique Z_{el} du transducteur émetteur chargé par l'impédance ramenée Z_{01} comme une fonction de l'impédance électrique qu'il posséderait s'il était chargé par l'impédance caractéristique Z_1 . La factorisation des termes relatifs à la transduction et de ceux relatifs à la propagation sera ainsi réalisée.

Nous ferons de même pour le coefficient de transmission électrique T_{el} (§2.03-5) et pour le rapport de conversion électro-acoustique K_e (§2.03-5).

Nous exprimerons, dans le paragraphe 2.03-6, l'impédance acoustique Z_a ramenée en surface du transducteur récepteur en fonction des impédances électriques du transducteur et de sa charge électrique Z_c . Nous en tirerons l'expression du coefficient de réflexion acoustique r_{34} sur le transducteur récepteur (§2.03-7). La connaissance de cette impédance terminale nous permet de remonter à l'impédance de charge du transducteur émetteur Z_{01} . Nous donnerons en fin dans le paragraphe 2.03-8, l'expression du rapport de conversion acousto-électrique K_r . Nous ferons apparaître le lien existant entre les rapports de conversion électro-acoustique et acousto-électrique.

2.03-2 EQUATIONS DE TRANSDUCTION D'UNE COUCHE PIEZO-ELECTRIQUE MINCE

La couche piézo-électrique est normale à l'axe z . Son épaisseur d est faible devant ses autres dimensions.

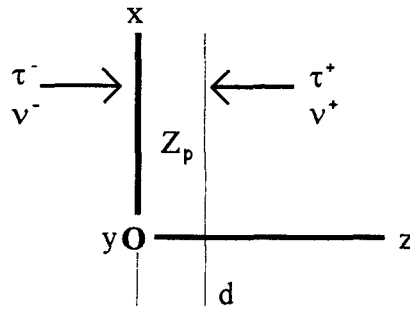
Nous négligeons les effets de bord et considérons les champs et inductions électriques ainsi que les contraintes et déplacements comme invariants par translation suivant les axes x et y .

Nous négligeons les effets de la métallisation.

Nous faisons l'hypothèse supplémentaire que les pertes piézo-électriques peuvent être négligées.

Nous commençons par traiter le cas générique d'un transducteur utilisé en émetteur ou en récepteur. Pour ce faire, le sens de propagation est arbitrairement choisi de la gauche vers la droite, nous affectons d'un exposant '-' les grandeurs évaluées en $z=0$ et d'un exposant '+' celles évaluées en $z=d$.

Le couplage des grandeurs électriques et mécaniques dans ce modèle unidimensionnel présenté, conduit à :



$$\tau^- = i \frac{e}{\varepsilon \omega S} I - i Z_p \left(\frac{v^+}{\sin \theta} - \frac{v^-}{\tan \theta} \right) \quad (2.03-1)$$

$$\tau^+ = i \frac{e}{\varepsilon \omega S} I - i Z_p \left(\frac{v^+}{\tan \theta} - \frac{v^-}{\sin \theta} \right) \quad (2.03-2)$$

$$V = \frac{I}{i C_0 \omega} + i \frac{e}{\varepsilon \omega} (v^+ - v^-) \quad (2.03-3)$$

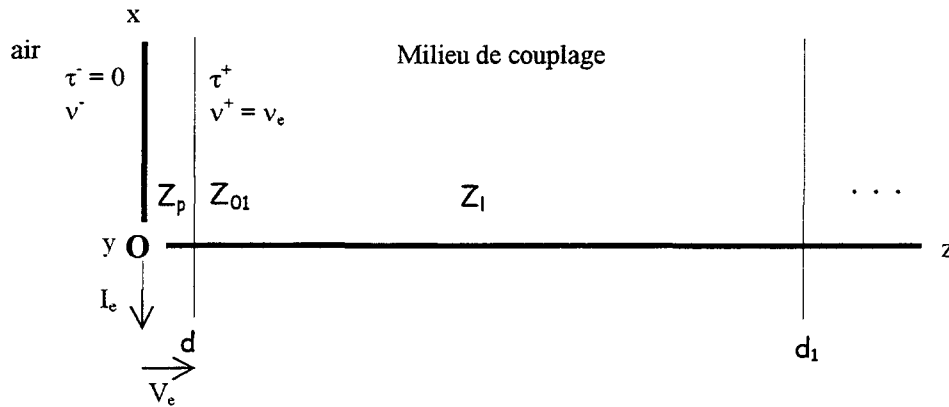
avec :

- $C_0 = \frac{\varepsilon d}{S}$, la capacité statique
- ε la permittivité électrique
- e la constante piézo-électrique
- S est la surface active de la couche piézo-électrique du transducteur
- d son épaisseur
- Z_p l'impédance caractéristique de la couche piézo-électrique
- v^- et v^+ la vitesse de déplacement des particules aux interfaces gauche et droite de la couche
- τ^- et τ^+ la contrainte aux interfaces gauche et droite de la couche
- V la différence de potentiel entre les deux faces de la couche piézo-électrique
- I l'intensité du courant électrique
- $\theta = k_p d$, avec k_p le nombre d'onde de l'onde se propageant dans le transducteur à la pulsation ω .

2.03-3 RELATIONS GENERALES DE CONVERSION

2.03-3-a RELATIONS A L'EMISSION

La contrainte τ^+ et la vitesse de déplacement v^+ sont liées par l'impédance ramenée en surface du transducteur $Z_{01} = Z_1 \frac{1 + \overline{r_{12}} e^{-2i\theta_1}}{1 - r_{12} e^{-2i\theta_1}}$. Une différence de potentiel V_e est appliquée aux bornes de la couche piézo-électrique, un courant I_e la parcourt. L'impédance électrique du transducteur Z_{el} vérifie $V_e = Z_{el} I_e$. L'impédance acoustique ramenée à l'interface air / couche piézo-électrique est nulle, ainsi que la contrainte τ^- .



Les équations (2.03-1) et (2.03-2) peuvent alors s'exprimer sous la forme matricielle suivante :

$$\frac{i e}{\varepsilon \omega S} I_e \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i Z_p}{\sin \theta} & -\frac{i Z_p}{\tan \theta} \\ -Z_{01} + \frac{i Z_p}{\tan \theta} & -\frac{i Z_p}{\sin \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^+ \\ v^- \end{bmatrix}$$

$$= H_e \begin{bmatrix} v^+ \\ v^- \end{bmatrix}$$

Que l'on peut inverser afin d'obtenir les vitesses de déplacement particulière sur les deux faces :

$$\begin{vmatrix} v^+ \\ v^- \end{vmatrix} = \frac{i}{\varepsilon} \frac{e}{\omega S} I_e H_e' \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

H_e' est la matrice inverse de la matrice H_e :

$$H_e' = \frac{1}{Z_{01} \cos \theta + i Z_p \sin \theta} \begin{vmatrix} 1 & -\cos \theta \\ \cos \theta + i \frac{Z_{01}}{Z_p} \sin \theta & -1 \end{vmatrix} \quad (2.03-4)$$

- L'impédance électrique du transducteur émetteur est obtenue en reportant les valeurs des vitesses de déplacement particulaire dans l'équation 2.03-3. Elle s'exprime par :

$$Z_{el} = \frac{1}{i C_o \omega} - \frac{e^2}{\varepsilon^2 \omega^2 S} (H_{e11}' + H_{e12}' - H_{e21}' - H_{e22}') \quad (2.03-5)$$

- Nous avons défini le rapport de conversion électro-acoustique par $v_e = K_e V_e$, il en découle :

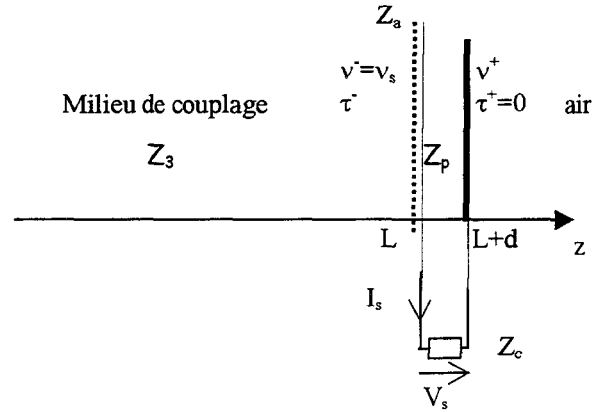
$$K_e = \frac{1}{Z_{el}} \frac{i}{\varepsilon} \frac{e}{\omega S} (H_{e11}' + H_{e12}') \quad (2.03-6)$$

2.03-3-b RELATION A LA RECEPTION

Nous affectons d'un exposant '-' les grandeurs évaluées en $z = L$ et d'un exposant '+' celles évaluées en $z = L+d$.

La couche piézo-électrique reçoit une onde acoustique de vitesse particulaire v_s . Elle est chargée par l'impédance électrique Z_c de l'appareil de mesure.

L'impédance acoustique ramenée à l'interface air/couche piézo-électrique est nulle, ainsi que la contrainte T^+ . La différence de potentiel V_s qui apparaît aux bornes de la couche piézo-électrique et le courant I_s qui la parcourt vérifie $V_s = -Z_c I_s$.



Les équations (2.03-1) à (2.03-3) peuvent alors s'exprimer sous la forme matricielle suivante³⁹ :

$$\begin{bmatrix} \frac{-ie}{\varepsilon \omega S Z_c} \\ \frac{-ie}{\varepsilon \omega S Z_c} \\ 1 + \frac{1}{i C_0 \omega Z_c} \end{bmatrix} V_s = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-i Z_p}{\tan \theta} & \frac{i Z_p}{\sin \theta} \\ 0 & \frac{-i Z_p}{\sin \theta} & \frac{i Z_p}{\tan \theta} \\ 0 & \frac{-ie}{\varepsilon \omega} & \frac{ie}{\varepsilon \omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau^- \\ v^- \\ v^+ \end{bmatrix}$$

$$= H_r \begin{bmatrix} \tau^- \\ v^- \\ v^+ \end{bmatrix}$$

Comme précédemment, cette relation peut s'inverser :

$$\begin{bmatrix} \tau^- \\ v^- \\ v^+ \end{bmatrix} = H_r' \begin{bmatrix} \frac{-i e}{\varepsilon \omega S Z_c} \\ \frac{-i e}{\varepsilon \omega S Z_c} \\ 1 + \frac{1}{i C_0 \omega Z_c} \end{bmatrix} V_s$$

39 Deblock Y., 'Caractérisation ultrasonore haute fréquence des propriétés viscoélastiques de milieux liquides', thèse de doctorat, Université de Valenciennes, pp 71-72, juin 1997

Où, H_r' est l'inverse de la matrice H_r :

$$H_r' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -Z_p \frac{\varepsilon \omega}{e} \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \\ 0 & \frac{i}{Z_p} \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} & -i \frac{\varepsilon \omega}{e} \frac{\cos\theta}{1-\cos\theta} \\ 0 & \frac{i}{Z_p} \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} & -i \frac{\varepsilon \omega}{e} \frac{1}{1-\cos\theta} \end{vmatrix} \quad (2.03-7)$$

- Nous pouvons exprimer l'impédance ramenée Z_a par la couche piézo-électrique par :

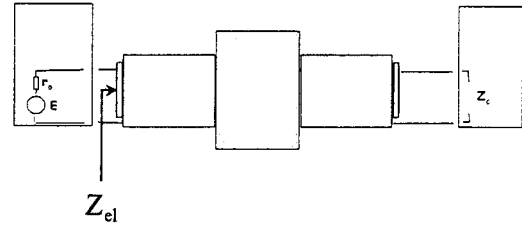
$$Z_a = - \frac{T^+}{V^+} = - \frac{(H_{r11}' + H_{r12}') \left(\frac{-i e}{\varepsilon \omega S Z_c} \right) + H_{r13}' \left(1 + \frac{1}{i C_o \omega Z_c} \right)}{(H_{r21}' + H_{r22}') \left(\frac{-i e}{\varepsilon \omega S Z_c} \right) + H_{r23}' \left(1 + \frac{1}{i C_o \omega Z_c} \right)} \quad (2.03-8)$$

- Nous avons défini le rapport de conversion acousto-électrique par $V_s = K_r v_s$, il en découle :

$$K_r^{-1} = (H_{r21}' + H_{r22}') \left(\frac{-i e}{\varepsilon \omega S Z_c} \right) + H_{r23}' \left(1 + \frac{1}{i C_o \omega S Z_c} \right) \quad (2.03-9)$$

2.03-4 EXPRESSION DES GRANDEURS ELECTRO-A COUSTIQUES

2.03-4-a IMPEDANCE ELECTRIQUE DU TRANSDUCTEUR E METTEUR



Nous présentons la méthode originale de factorisation sur l'impédance électrique du transducteur émetteur, elle sera reprise mais non détaillée pour les autres grandeurs. En introduisant le coefficient de couplage électromécanique k^2 et en reportant les valeurs des composantes de H^e dans l'expression de l'impédance électrique (2.03-5), nous obtenons l'équation :

$$Z_{el} = \frac{1}{iC_0\omega} + \frac{k^2}{C_0\omega} \frac{1}{\theta} \frac{2Z_p(\cos\theta - 1) + iZ_{01}\sin\theta}{Z_{01}\cos\theta + iZ_p\sin\theta}$$

$$\text{où } \frac{k^2}{C_0\omega} \frac{1}{\theta} = \frac{1}{Z_p} \frac{e^2}{\varepsilon^2 \omega^2 S}$$

L'expression suivante facilite le regroupement des termes :

$$Z_{el} = \frac{1}{iC_0\omega} \frac{[Z_{01}\cos\theta + iZ_p\sin\theta] + \frac{k^2}{\theta} [2iZ_p(\cos\theta - 1) - Z_{01}\sin\theta]}{Z_{01}\cos\theta + iZ_p\sin\theta} \quad (2.03-10)$$

L'introduction de l'expression 2.02-10 de Z_{01} dans l'équation 2.03-10 permet de décrire la contribution du milieu de propagation sur l'impédance électrique du transducteur. En notant le numérateur N et le dénominateur D tels que:

$$Z_{el} = \frac{1}{iC_0\omega} \frac{N}{D}$$

$$N = \left\{ (Z_1\cos\theta + iZ_p\sin\theta) + \frac{k^2}{\theta} [2iZ_p(\cos\theta - 1) - Z_1\sin\theta] \right\} \\ \left\{ 1 + \frac{(Z_1\cos\theta - iZ_p\sin\theta) - \frac{k^2}{\theta} [2iZ_p(\cos\theta - 1) + Z_1\sin\theta]}{(Z_1\cos\theta + iZ_p\sin\theta) - \frac{k^2}{\theta} [-2iZ_p(\cos\theta - 1) + Z_1\sin\theta]} \frac{1}{r_{12}} e^{-i2\theta_1} \right\}$$

$$D = (Z_1 \cos \theta + i Z_p \sin \theta) \cdot \left(1 + \frac{Z_1 \cos \theta - i Z_p \sin \theta}{Z_1 \cos \theta + i Z_p \sin \theta} \frac{1}{r_{12}} e^{-2i\theta_1} \right)$$

Nous appelons Z_{el}^∞ , l'impédance électrique du transducteur chargé par un milieu semi-infini d'impédance caractéristique Z_1 :

$$Z_{el}^\infty = \frac{1}{i C_0 \omega} + \frac{k^2}{C_0 \omega} \frac{1}{\theta} \frac{2Z_p (\cos \theta - 1) + i Z_1 \sin \theta}{Z_1 \cos \theta + i Z_p \sin \theta} \quad (2.03-11)$$

nous obtenons enfin :

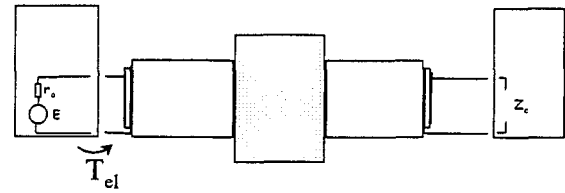
$$\begin{aligned} Z_{el} &= Z_{el}^\infty \frac{1 - A \frac{Z_{el}^{\infty*}}{Z_{el}^\infty} \frac{1}{r_{12}} e^{-2i\theta_1}}{1 + A \frac{1}{r_{12}} e^{-2i\theta_1}} \\ &= Z_{el}^\infty - 2 \Re(Z_{el}^\infty) \frac{A \frac{1}{r_{12}} e^{-2i\theta_1}}{1 + A \frac{1}{r_{12}} e^{-2i\theta_1}} \end{aligned} \quad (2.03-12)$$

où :

- $Z_{el}^{\infty*}$ est le complexe conjugué de Z_{el}^∞ ,
- $\Re(Z_{el}^\infty)$ est la partie réelle de l'impédance électrique Z_{el}^∞
- $A = \frac{Z_1 \cos \theta - i Z_p \sin \theta}{Z_1 \cos \theta + i Z_p \sin \theta}$

Dans le cas où les longueurs des milieux de propagations sont grandes devant les longueurs d'ondes des ondes qui s'y propagent, l'impédance électrique du transducteur présente des oscillations autour de la valeur Z_{el}^∞ .

2.03-4-b COEFFICIENT DE TRANSMISSION ELECTRIQUE :



La tension électrique aux bornes du transducteur émetteur est la somme de la tension électrique incidente et de la tension réfléchie :

$$V_e = V_{inc} + V_{refl} = V_{inc} \frac{2Z_{el}}{Z_{el} + r_o}$$

r_o est l'impédance caractéristique de la ligne et se réduit généralement à la résistance interne du générateur.

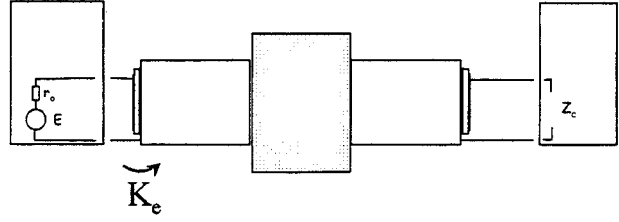
Nous obtenons en introduisant l'expression 2.03-12 de l'impédance électrique du transducteur :

$$T_{el} = \frac{2Z_{el}}{Z_{el} + r_o} = T_{el}^{\infty} \frac{1 - A \frac{Z_{el}^{\infty*}}{Z_{el}^{\infty}} r_{12} e^{-2i\theta_1}}{1 - r_{10} r_{12} e^{-2i\theta_1}} \quad (2.03-13)$$

$$\text{avec } T_{el}^{\infty} = \frac{2Z_{el}^{\infty}}{Z_{el}^{\infty} + r_o}$$

où par analogie à l'équation 2.03-18, $r_{10} = A \frac{Z_{el}^{\infty*} - r_o}{Z_{el}^{\infty} + r_o}$ représente le coefficient de réflexion sur la surface du transducteur émetteur chargé par l'impédance électrique r_o .

2.03-4-c RAPPORT DE CONVERSION ELECTRO-ACOUSTIQUE :



Nous obtenons l'expression du coefficient de conversion électro-acoustique K_e en reportant les valeurs de H^e dans 2.03-6:

$$K_e = \frac{e}{\varepsilon \omega S} \frac{1}{Z_{el}} \frac{1 - \cos \theta}{Z_p \sin \theta - i Z_{01} \cos \theta} \quad (2.03-14)$$

Le regroupement des termes est effectué comme précédemment, nous obtenons finalement pour K_e :

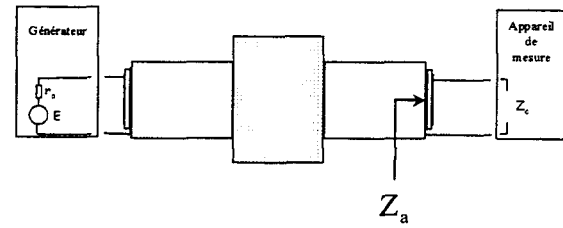
$$K_e = K_e^\infty \frac{1 - \overline{r_{12}} e^{-2i\theta_1}}{1 - A \frac{Z_{el}^\infty}{Z_{el}} \overline{r_{12}} e^{-2i\theta_1}} \quad (2.03-15)$$

où K_e^∞ représente le coefficient reliant la vitesse de déplacement particulière à la tension aux bornes d'un transducteur chargé par un milieu illimité d'impédance caractéristique Z_1 :

$$K_e^\infty = \frac{e}{\varepsilon \omega S} \frac{1}{Z_{el}^\infty} \frac{1 - \cos \theta}{Z_p \sin \theta - i Z_1 \cos \theta} \quad (2.03-16)$$

Son module présente des maxima pour $\theta = (2n+1)\pi$ ou $f = (2n+1) f_0$, $n \in \mathbb{N}$.

2.03-4-d IMPEDANCE ACOUSTIQUE Z_a DU TRANSDUCTEUR RECEPTEUR



En introduisant les expressions des composantes de H^r dans l'expression de l'impédance terminale 2.03-8, nous obtenons :

$$Z_a = \frac{i \frac{k^2}{C_0 \omega} \frac{1}{\theta} 2 Z_p (\cos \theta - 1) - Z_p \sin \theta \left(Z_c + \frac{1}{i C_0 \omega} \right)}{-\frac{k^2}{C_0 \omega} \frac{1}{\theta} \sin \theta + i \cos \theta \left(Z_c + \frac{1}{i C_0 \omega} \right)} \quad (2.03-17)$$

En factorisant $1/C_0 \omega$:

$$Z_a = Z_3 \frac{\frac{k^2}{\theta} 2 i Z_p (\cos \theta - 1) + i Z_p \sin \theta - Z_p \sin \theta Z_c C_0 \omega}{-\frac{k^2}{\theta} Z_3 \sin \theta + Z_3 \cos \theta + i Z_3 \cos \theta + i Z_3 \cos \theta Z_c C_0 \omega}$$

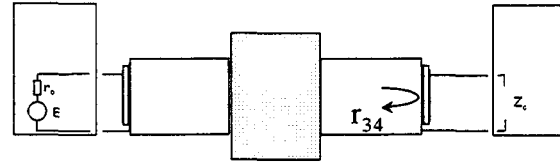
Qui s'exprime en fonction de l'impédance électrique du transducteur émettant dans le milieu d'impédance caractéristique Z_3 par :

$$Z_a = Z_3 \frac{(Z_{el}^\infty + Z_c) (Z_3 \cos \theta + i Z_p \sin \theta) + (Z_{el}^{\infty*} - Z_c) (Z_3 \cos \theta - i Z_p \sin \theta)}{(Z_{el}^\infty + Z_c) (Z_3 \cos \theta + i Z_p \sin \theta) - (Z_{el}^{\infty*} - Z_c) (Z_3 \cos \theta - i Z_p \sin \theta)}$$

Le regroupement des termes s'effectue en faisant apparaître le facteur A introduit dans l'équation 2.03-12

$$Z_a = Z_3 \frac{1 + A \frac{Z_{el}^{\infty*} - Z_c}{Z_{el}^\infty + Z_c}}{1 - A \frac{Z_{el}^{\infty*} - Z_c}{Z_{el}^\infty + Z_c}} \quad (2.03-18)$$

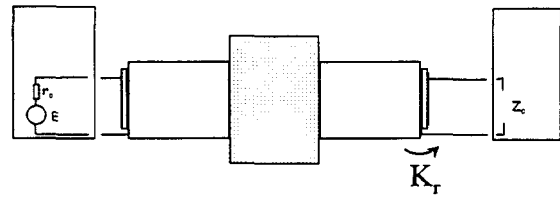
2.03-4-e COEFFICIENT DE REFLEXION ACOUSTIQUE SUR LE TRANSDUCTEUR RECEPTEUR :



De l'expression générale 2.03-17 de Z_a , nous tirons facilement le coefficient de réflexion r_{34} en surface du transducteur récepteur :

$$\text{Comme } Z_a = Z_3 \frac{1 + r_{34}}{1 - r_{34}}, \quad r_{34} = A \frac{Z_{el}^{\infty*} - Z_c}{Z_{el}^{\infty} + Z_c} \quad (2.03-19)$$

2.03-4-f RAPPORT DE CONVERSION ACOUSTO-ELECTRIQUE :



Nous pouvons exprimer le rapport de conversion acousto-électrique K_r à l'aide de l'expression du rapport de conversion électro-acoustique K_e^{∞} que possède le même transducteur utilisé en émetteur dans un milieu illimité d'impédance caractéristique Z_3 . En reportant les composantes de H_r' dans l'équation 2.03-9, il vient :

$$\frac{1}{K_r} = \frac{\varepsilon \omega}{e} \frac{1}{Z_c} \frac{\frac{k^2}{C_0 \omega} \frac{1}{\theta} \sin \theta - i \left(Z_c + \frac{1}{i C_0 \omega} \right) \cos \theta}{1 - \cos \theta} \quad (2.03-20)$$

En remarquant que :

$$(Z_{el}^{\infty} + Z_c) - A(Z_{el}^{\infty*} + Z_c) = -2Z_3 \frac{\frac{k^2}{C_0 \omega} \frac{1}{\theta} \sin \theta - i \left(Z_c + \frac{1}{i C_0 \omega} \right) \cos \theta}{Z_p \sin \theta - i Z_3 \cos \theta}$$

et en faisant intervenir $K_e^{\infty*}$, nous obtenons :

$$\frac{1}{K_r} = \frac{-1}{2 Z_3} \frac{\varepsilon^2 \omega^2 S}{e^2} \frac{1}{Z_c} K_e^{\infty*} Z_{el}^{\infty*} \frac{\left[(Z_{el}^{\infty} + Z_c) - A (Z_{el}^{\infty*} + Z_c) \right] \left[(Z_p \sin \theta)^2 + (Z_3 \cos \theta)^2 \right]}{(1 - \cos \theta)^2}$$

Puis en regroupant les termes de façon à faire apparaître le coefficient de transmission du milieu d'impédance Z_3 vers le transducteur,

$t_{34} = 1 - r_{34} = 1 - A \frac{Z_{el}^{\infty*} - Z_c}{Z_{el}^{\infty} + Z_c}$ et la partie réelle de l'impédance électrique du

transducteur, $\Re(Z_{el}^{\infty}) = Z_3 \frac{e^2}{\varepsilon^2 \omega^2 S} \frac{(1 - \cos \theta)^2}{(Z_p \sin \theta)^2 + (Z_3 \cos \theta)^2}$, nous obtenons

$K_r = -\frac{1}{t_{34}} \frac{2 Z_c}{Z_{el}^{\infty} + Z_c} \frac{\Re(Z_{el}^{\infty})}{K_e^{\infty*} Z_{el}^{\infty*}}$, que nous pouvons finalement exprimer sous la forme :

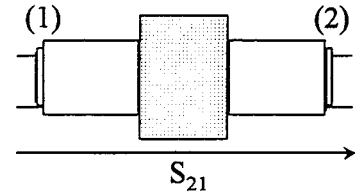
$$K_r = \frac{1}{t_{34}} \frac{2 Z_c}{Z_{el}^{\infty} + Z_c} A \frac{\Re(Z_{el}^{\infty})}{K_e^{\infty*} Z_{el}^{\infty*}} \quad (2.03-21)$$

puisque $A = -\frac{K_e^{\infty} Z_{el}^{\infty}}{K_e^{\infty*} Z_{el}^{\infty*}}$

2.04 EXPRESSION DES PARAMETRES S NECESSAIRES A LA CARACTERISATION

Nous pouvons maintenant obtenir les expressions des paramètres S du système de mesure. Une inversion du temps ne doit pas avoir de conséquences sur les grandeurs représentant la transmission acoustique. Les expressions des paramètres S_{12} et S_{21} sont identiques. Les seuls trois paramètres S_{11} , S_{22} et S_{21} sont susceptibles d'apporter des informations complémentaires sur le système. Nous les calculons à partir de leurs définitions données en annexe 7 et des coefficients que nous venons de calculer.

2.04-1 PARAMETRE S_{21} DU SYSTEME



La fonction de transfert du système $S_{21} = \frac{V_s}{V_{inc}}$ est déduite des expressions précédentes :

$$S_{21} = \frac{V_s}{V_{inc}} = \frac{2 Z_{el}^{(1)}}{Z_{el}^{(1)} + r_0} K_e^{(1)} K_r^{(2)} \frac{V_s}{V_e} \quad (2.04-1)$$

où nous différencions les deux transducteurs par les exposants (1) pour l'émetteur et (2) pour le récepteur, les deux transducteurs n'étant pas forcément absolument identiques.

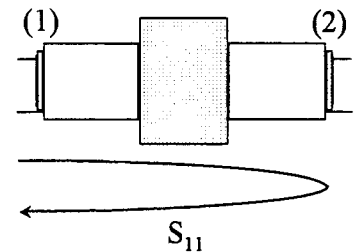
Le découplage entre le phénomène de transduction et les caractéristiques de propagation dans les milieux permet d'exprimer l'équation 2.04-1 sous la forme :

$$S_{21} = K_{21} S_{21}^{ac} \quad (2.04-2)$$

où K_{21} représente le facteur global de conversion électro-acoustique du système de mesure du paramètre S_{21} , et S_{21}^{ac} , un terme représentant la contribution au paramètre S_{12} des ondes stationnaires existant dans les trois milieux.

Les expressions de K_{21} et de S_{21}^{ac} sont données en annexe 9.

2.04-2 PARAMETRE S_{11} DU SYSTEME



De par sa définition :

$$S_{11} = \frac{V_{réf}}{V_{inc}} = \frac{Z_{el}^{(1)} - r_0}{Z_{el}^{(1)} + r_0} \quad (2.04-3)$$

En définissant le coefficient de réflexion électrique sur le transducteur 1 chargé par un milieu semi infini d'impédance caractéristique Z_1 par :

$$S_{11}^{\infty} = \frac{Z_{el}^{(1)} - r_0}{Z_{el}^{(1)} + r_0}, \text{ puis en utilisant les expressions 2.03-12 de l'impédance électrique,}$$

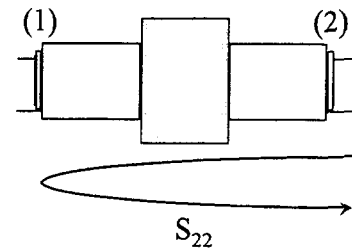
nous obtenons :

$$S_{11} = S_{11}^{\infty} - K_{11} S_{11}^{ac} \quad (2.04-4)$$

où K_{11} représente le facteur global de conversion électro-acoustique du système de mesure du paramètre S_{11} . Il n'est que le cas particulier du facteur K_{21} pour lequel les deux transducteurs, émetteur et récepteur, sont identiques. S_{11}^{ac} représente la contribution au paramètre S_{11} des ondes stationnaires existant dans les trois milieux.

Ces deux grandeurs sont explicitées en annexe 9.

2.04-3 PARAMETRE S_{22} DU SYSTEME



Nous avons obtenu l'expression littérale du paramètre S_{11} . Nous pouvons en tirer celles du paramètre S_{22} . Il suffit de permuter les grandeurs relatives aux milieux de couplages et aux impédances des deux transducteurs dans les expressions précédentes.

De l'expression du paramètre S_{11} , nous déduisons celle du paramètre S_{22} :

$$S_{22} = S_{22}^{\infty} - K_{22} S_{22}^{ac} \quad (2.04-5)$$

Où comme pour les deux autres paramètres K_{22} représente le facteur global de conversion électro-acoustique du système de mesure du paramètre S_{22} . S_{22}^{ac} représente la contribution au paramètre S_{22} des ondes stationnaires existant dans les trois milieux.

Ces deux grandeurs sont explicitées en annexe 9.

S_{22}^{∞} représente le coefficient de réflexion électrique sur le transducteur 2 chargé par un milieu semi infini d'impédance caractéristique Z_3 .

2.05 ANALYSE DES EXPRESSIONS DES PARAMETRES S

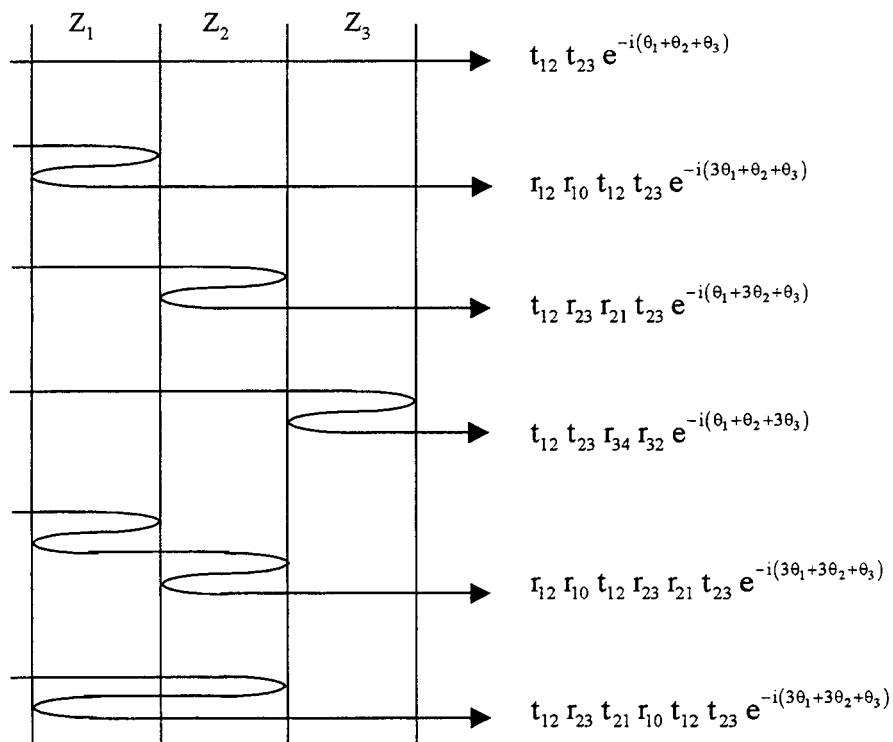
2.05-1 INTERPRETATION DES PARAMETRES S_{11} ET S_{21}

Le dénominateur D est constitué de termes dont le module est inférieur à l'unité. Les grandeurs S_{21}^{ac} et S_{11}^{ac} peuvent se développer en série géométrique.

2.05-1-a PARAMETRE S_{21}

Nous obtenons ainsi pour S_{21}^{ac} , les premiers termes aisément interprétables présentés sur la figure 2-2 suivante.

Figure 2-2 : premiers termes de S_{21}^{ac}

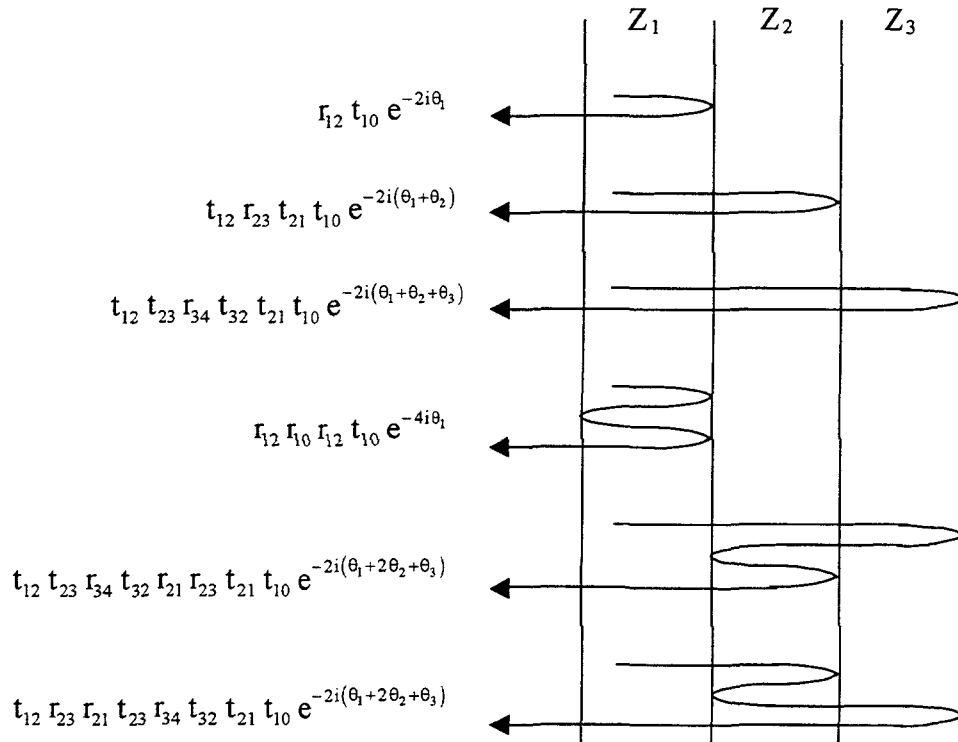


Interprétation des termes
apparaissant dans S_{21}^{ac}

2.05-1-b PARAMETRE S_{11}

Le premier terme S_{11}^∞ , du paramètre S_{11} décrit la réflexion électrique sur le transducteur. Le second terme, S_{11}^{ac} est lié aux réflexions acoustiques aux différentes interfaces. Nous pouvons le développer sous la forme d'une série géométrique. La figure suivante fait apparaître quelques-uns des premiers termes de cette série.

Figure 2-3 : premiers termes de S_{11}^{ac}



Interprétation des termes
apparaissant dans S_{11}^{ac}

2.05-2 EXISTENCE D'UNE TRANSFORMEE DE FOURIER INVERSE

Les paramètres S admettent des transformées de Fourier inverses qui représentent les réponses impulsionnelles tronquées du système de mesure en transmission et en réception. Nous rappelons les expressions des premiers termes des paramètres S et introduisons leurs représentations temporelles :

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= S_{11}^{\infty} \\
 &\quad - K_{11} t_{10} r_{12} e^{-2\theta_1} - K_{11} t_{10} t_{12} r_{23} t_{21} e^{-2(\theta_1+\theta_2)} - \dots \\
 &\quad \downarrow \mathfrak{F}^{-1} \\
 s_{11} &= s_{11}^{\infty} \\
 &\quad - k_{11} \otimes \mathfrak{F}^{-1}(t_{10}) \otimes \left\{ \delta\left(t - \frac{2e_1}{v_1}\right) \otimes \mathfrak{F}^{-1}(r_{12} e^{-2\alpha_1 e_1}) \right\} \\
 &\quad - k_{11} \otimes \mathfrak{F}^{-1}(t_{10}) \otimes \left\{ \delta\left(t - \frac{2e_1}{v_1} - \frac{2e_2}{v_2}\right) \otimes \mathfrak{F}^{-1}(t_{12} r_{23} t_{21} e^{-2\alpha_1 e_1 - 2\alpha_2 e_2}) \right\} \\
 &\quad - \dots
 \end{aligned}$$

(2.05-1)

$$\begin{aligned}
 S_{22} &= S_{22}^{\infty} \\
 &\quad - K_{22} t_{34} r_{32} e^{-2\theta_3} - K_{22} t_{34} t_{32} r_{21} t_{23} e^{-2(\theta_2+\theta_3)} - \dots \\
 &\quad \downarrow \mathfrak{F}^{-1} \\
 s_{22} &= s_{22}^{\infty} \\
 &\quad - k_{22} \otimes \mathfrak{F}^{-1}(t_{34}) \otimes \left\{ \delta\left(t - \frac{2e_3}{v_3}\right) \otimes \mathfrak{F}^{-1}(r_{32} e^{-2\alpha_3 e_3}) \right\} \\
 &\quad - k_{22} \otimes \mathfrak{F}^{-1}(t_{34}) \otimes \left\{ \delta\left(t - \frac{2e_3}{v_3} - \frac{2e_2}{v_2}\right) \otimes \mathfrak{F}^{-1}(t_{32} r_{21} t_{23} e^{-2\alpha_3 e_3 - 2\alpha_2 e_2}) \right\} \\
 &\quad - \dots
 \end{aligned}$$

(2.05-2)

$$\begin{aligned}
 S_{21} &= K_{21} t_{12} t_{23} e^{-i(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)} + K_{21} r_{10} r_{12} t_{12} t_{23} e^{-i(3\theta_1+\theta_2+\theta_3)} \\
 &\quad + K_{21} t_{12} r_{23} r_{21} t_{23} e^{-i(\theta_1+3\theta_2+\theta_3)} + \dots \\
 &\quad \downarrow \mathfrak{F}^{-1} \\
 s_{21} &= k_{21} \otimes \left\{ \delta\left(t - \frac{e_1}{v_1} - \frac{e_2}{v_2} - \frac{e_3}{v_3}\right) \otimes \mathfrak{F}^{-1}(t_{12} t_{23} e^{-\alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \alpha_3 e_3}) \right\} \\
 &\quad + k_{21} \otimes \mathfrak{F}^{-1}(r_{10}) \otimes \left\{ \delta\left(t - \frac{3e_1}{v_1} - \frac{e_2}{v_2} - \frac{e_3}{v_3}\right) \otimes \mathfrak{F}^{-1}(r_{12} t_{12} t_{23} e^{-3\alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \alpha_3 e_3}) \right\} \\
 &\quad + k_{21} \otimes \left\{ \delta\left(t - \frac{e_1}{v_1} - \frac{3e_2}{v_2} - \frac{e_3}{v_3}\right) \otimes \mathfrak{F}^{-1}(t_{12} r_{23} r_{21} t_{23} e^{-\alpha_1 e_1 - 3\alpha_2 e_2 - \alpha_3 e_3}) \right\} + \dots
 \end{aligned}$$

(2.05-3)

où :

- $\mathfrak{F}^{-1}$ représente la transformée de Fourier inverse,
- $\otimes$ le produit de convolution,
- δ la distribution de Dirac,
- W la fenêtre de mesure.
- e_i l'épaisseur de la couche i
- $s_{ij} = \mathfrak{F}^{-1}(S_{ij})$
- $s_{ii}^{\infty} = \mathfrak{F}^{-1}(S_{ii}^{\infty}) \otimes \mathfrak{F}^{-1}(W)$
- $k_{ij} = \mathfrak{F}^{-1}(K_{ij}) \otimes \mathfrak{F}^{-1}(W)$

2.05-3 TERMES UTILES DE CHAQUE PARAMETRE S

La caractérisation complète du milieu 2 nécessite la connaissance de la célérité et du coefficient d'atténuation de l'onde se propageant dans ce milieu. Nous avons aussi accès à sa densité si nous mesurons son impédance caractéristique.

Nous supposons les milieux de couplages parfaitement connus.

Les paramètres S , décrit à l'aide des séries géométriques font apparaître une redondance d'information. Le premier terme de chaque paramètre contient les grandeurs suffisantes à la caractérisation. Nous nous appliquerons par la suite à correctement mesurer ces premiers termes que nous appellerons termes utiles.

Nous notons $t_{npq} = \frac{n e_1}{v_1} + \frac{p e_2}{v_2} + \frac{q e_3}{v_3}$ le temps associé à n parcours dans le milieu 1, p

parcours dans le milieu 2 et q parcours dans le milieu 3. Nous adoptons le même formalisme en ce qui concerne les amplitudes, A_{npq} représente le niveau de l'impulsion associée au temps de vol t_{npq} .

Les impulsions utiles de la représentation temporelle apparaissent ainsi aux instant t_{111} , t_{200} et t_{002} , leurs niveaux sont notés A_{111} , A_{200} et A_{002} .

2.06 SIMULATION

Nous calculons les expressions de tous les coefficients intervenant dans les paramètres S ainsi que les paramètres S_{11} et S_{21} . Pour se rapprocher des conditions expérimentales que nous avons rencontrées, nous prenons un milieu 2 rendu dispersif par le choix de deux lois polynomiales d'évolution fréquentielle de la célérité et du coefficient d'atténuation. Les milieux de couplage sont constitués d'eau, et les transducteurs de céramiques PZT. Nous choisissons une bande de fréquence et un échantillonnage proche de ceux utilisé dans la pratique.

Les simulations sont conduites à partir du calcul des termes des matrices H_e' et H_r' donnés par les équations 2.03-4 et 2.03-7.

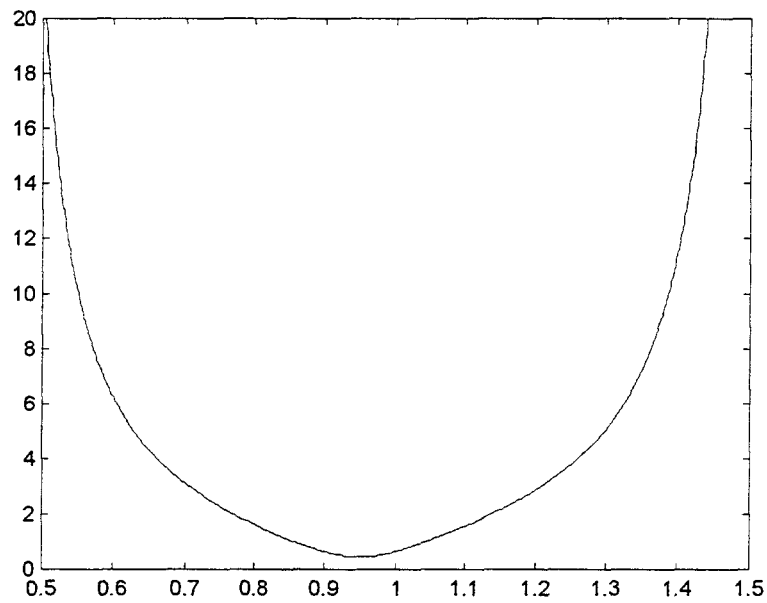
Nous présentons les résultats de simulation de l'impédance acoustique ramenée à la surface du transducteur récepteur, de l'impédance acoustique ramenée en entrée du système par les trois milieux, de l'impédance électrique du transducteur et des paramètres S_{11} et S_{21} . Nous présentons les résultats de simulation des autres grandeurs que nous avons définies dans ce chapitre en annexe 10.

2.06-1 IMPEDANCE ACOUSTIQUE Z_A RAMENEE SUR LE RECEPTEUR

Nous obtenons l'impédance acoustique que présente la surface réceptrice du transducteur chargé par l'appareil de mesure à partir de la relation 2.03-8 :

$$Z_a = - \frac{T^+}{v^+} = - \frac{(H_{11}^{r'} + H_{12}^{r'}) \left(\frac{-i e}{\varepsilon \omega S Z_c} \right) + H_{13}^{r'} \left(1 + \frac{1}{i C_o \omega Z_c} \right)}{(H_{21}^{r'} + H_{22}^{r'}) \left(\frac{-i e}{\varepsilon \omega S Z_c} \right) + H_{23}^{r'} \left(1 + \frac{1}{i C_o \omega Z_c} \right)}$$

Figure 2-4 : impédance acoustique ramenée en surface du transducteur récepteur



Impédance acoustique normalisée Z_0/Z_3
en fonction de la fréquence (MHz)

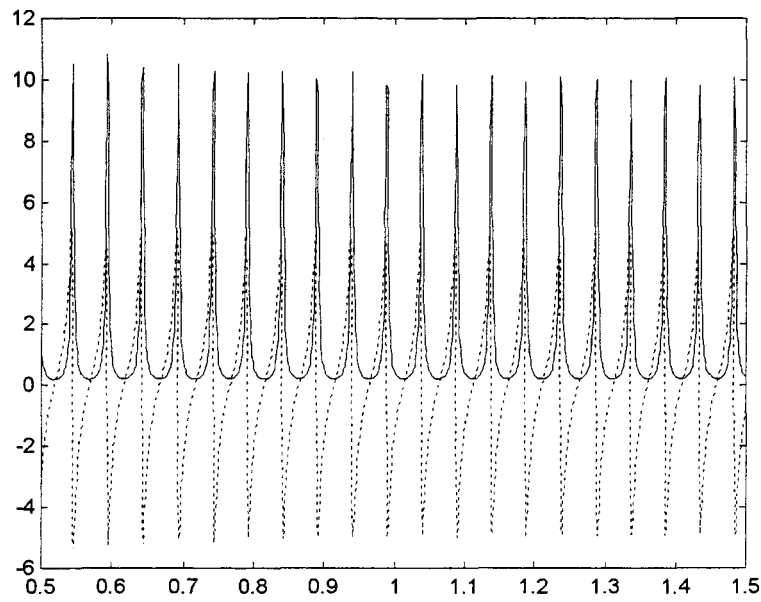
Nous avons choisi les caractéristiques des transducteurs de façon à ce qu'ils soient adaptés. L'impédance acoustique ramenée par le transducteur autour de sa fréquence de résonance est proche de l'impédance caractéristique du milieu de couplage. Le coefficient de réflexion de l'onde acoustique incidente sur le transducteur est très faible à la fréquence de résonance du transducteur. Il tend vers une valeur importante hors de bande.

2.06-2 IMPEDANCE RAMENEE Z_{01}

Connaissant l'impédance terminale, nous pouvons calculer l'impédance ramenée en entrée du système à partir de l'expression donnée en annexe 8, que nous rappelons :

$$\frac{Z_{01}}{Z_1} = \frac{1 + r_{12} e^{-2i\theta_1} + r_{12}r_{23} e^{-2i\theta_2} + r_{23}r_{34} e^{-2i\theta_3} + r_{12}r_{34} e^{-2i(\theta_1+\theta_3)} + r_{23} e^{-2i(\theta_1+\theta_2)} + r_{12}r_{23}r_{34} e^{-2i(\theta_1+\theta_3)} + r_{34} e^{-2i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}}{1 - r_{12} e^{-2i\theta_1} + r_{12}r_{23} e^{-2i\theta_2} + r_{23}r_{34} e^{-2i\theta_3} + r_{12}r_{34} e^{-2i(\theta_1+\theta_3)} - r_{23} e^{-2i(\theta_1+\theta_2)} - r_{12}r_{23}r_{34} e^{-2i(\theta_1+\theta_3)} - r_{34} e^{-2i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}}$$

Figure 2-5 : *impédance acoustique ramenée en surface du transducteur émetteur*



Partie réelle (—) et imaginaire (-----)
de l'impédance ramenée Z_{01} (MR_{ay})
en fonction de la fréquence (MHz)

Nous obtenons bien des oscillations de l'impédance ramenée en entrée du système. La 'période' moyenne de ces oscillations est voisine de 49,12kHz. Son inverse est de 20,36 μ s. Nous pouvons le comparer aux temps de vols associés aux allers-retours.

$$\frac{2 d_1}{v_0} = 20,24\mu s, \quad \frac{2 d_2}{\langle v_2 \rangle} = 6,83\mu s, \quad \frac{2 d_3}{v_0} = 13,49\mu s$$

Le milieu 1 semble imposer la période des oscillations. Cela est dû au coefficient de réflexion important entre les milieux 1 et 2, ($r_{12}=75\%$ pour les caractéristiques des matériaux que nous avons choisis). L'impédance Z_{01} est néanmoins liée aux résonances des trois milieux couplés.

2.06-3 IMPEDANCE ELECTRIQUE Z_{el}

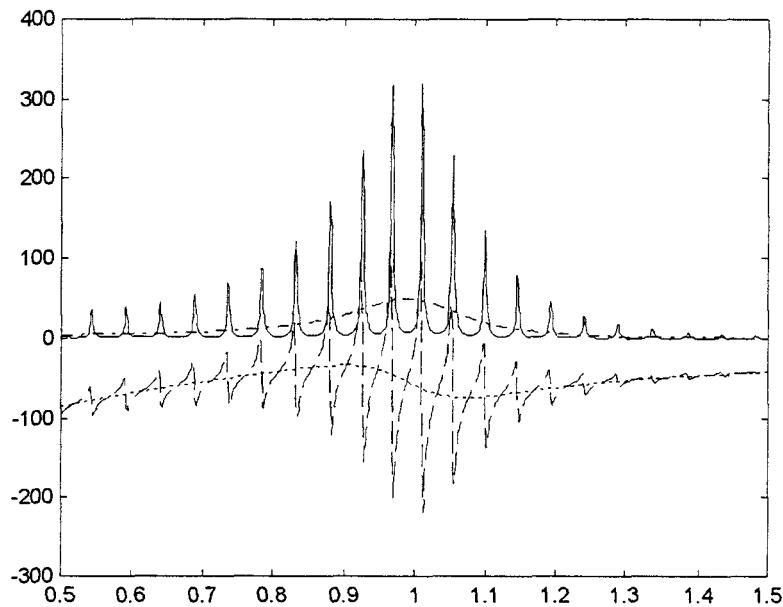
Nous calculons l'impédance électrique du transducteur à partir de l'expression 2.03-5 :

$$Z_{el} = \frac{1}{i C_0 \omega} - \frac{e^2}{\epsilon^2 \omega^2 S} (H_{11}^{e'} + H_{12}^{e'} - H_{21}^{e'} - H_{22}^{e'})$$

Le calcul de l'impédance électrique du transducteur chargé par un milieu semi-infini est mené à partir de l'expression 2.03-11 :

$$Z_{el}^{\infty} = \frac{1}{i C_0 \omega} + \frac{k^2}{C_0 \omega} \frac{1}{\theta} \frac{2Z_p (\cos \theta - 1) + i Z_l \sin \theta}{Z_l \cos \theta + i Z_p \sin \theta}$$

Figure 2-6 : impédance électrique du transducteur émetteur



Partie réelle (—) et imaginaire (---)
de l'impédance électrique Z_{el} (Ω)

Partie réelle (-.-.-) et imaginaire (-.-.-.-)
de l'impédance électrique Z_{el}^{∞} (Ω)

en fonction de la fréquence (MHz)

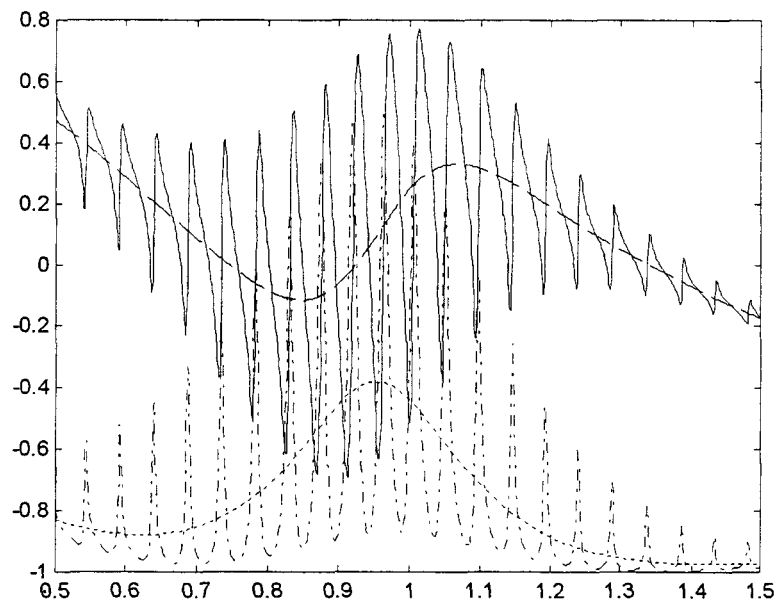
L'impédance électrique Z_{el} présente des fluctuations autour de l'impédance Z_{el}^{∞} conformément aux prédictions. Les oscillations se produisent avec la même période que précédemment.

2.06-4 PARAMETRE S_{11}

Il est calculé à partir de sa définition $S_{11} = \frac{Z_{el} - r_0}{Z_{el} + r_0}$, nous superposons à ces variations

celles de $S_{11}^\infty = \frac{Z_{el}^{(1)} - r_0}{Z_{el}^{(1)} + r_0}$.

Figure 2-7 : paramètre S_{11}



Partie réelle (—) et imaginaire (---)

du paramètre S_{11}

Partie réelle (-.-.-) et imaginaire (.....)

du paramètre S_{11}^∞

en fonction de la fréquence (MHz)

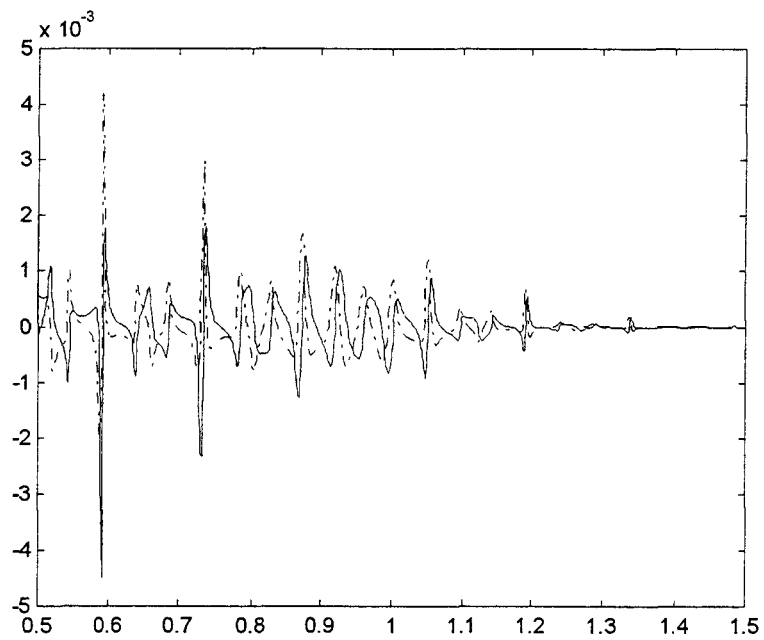
Nous observons bien que les oscillations rapides, caractéristiques de la traversée des trois milieux, se superposent à un terme de variation lente, S_{11}^∞ .

2.06-5 PARAMETRE S_{21}

Tous les paramètres intervenant dans son expression 2.01-1 ont été calculés :

$$S_{21} = \frac{2 Z_{el}^{(1)}}{Z_{el}^{(1)} + r_0} K_e^{(1)} K_r^{(2)} \frac{v_s}{v_e}$$

Figure 2-8 : paramètre S_{21}



Partie réelle (—) et imaginaire (----)
du paramètre S_{21}
en fonction de la fréquence (MHz)

Le faible niveau du paramètre S_{21} doit être relié au faible niveau déjà observé sur le rapport v_s/v_e (annexe 10).

2.07 CONCLUSION

L'étude acoustique d'un milieu multicouche nous a permis d'obtenir les expressions littérales de la relation entrée-sortie $\frac{v_s}{v_e}$, et de l'impédance ramenée Z_{01} en entrée du système. De l'étude de la transduction électro-acoustique, nous avons tiré les expressions littérales des paramètres S_{11} , S_{22} et S_{21} du système de mesure. Ces trois paramètres contiennent des informations à priori complémentaires sur le système de mesure. Les expressions littérales des trois paramètres S ont l'intérêt de mettre en évidence le rôle des transducteurs et des milieux de couplages dans la mesure. Nous en tirerons partie pour exposer une méthode de traitement du signal permettant d'évaluer la célérité et l'atténuation de l'onde acoustique se propageant dans le milieu étudié. Cela fera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 3. TRAITEMENT DU SIGNAL APPLIQUE AUX MESURES DES PARAMETRES S

3.01 INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté les expressions littérales des paramètres S d'un système acoustique de caractérisation. De ces expressions, il est possible d'envisager différentes techniques de traitement du signal permettant l'évaluation de la célérité et de l'atténuation de l'onde acoustique dans le milieu étudié.

La communauté scientifique travaillant sur la caractérisation de milieux par voie ultrasonore effectue dans sa grande majorité des mesures dans le domaine temporel, pour lequel les techniques de caractérisation sont éprouvées. Nous nous inspirons ici de ces méthodes, notamment de celle présentée par M.Kushibicki⁴⁰.

Les paramètres S résultent d'interférences entre toutes les ondes présentes dans les milieux. Leurs représentations temporelles décrivent ces interférences par une série d'impulsions. Nous sélectionnons les impulsions utiles pour la caractérisation par des fenêtres. Ces fenêtres constituent les réponses impulsionnelles de filtres appliqués dans le domaine fréquentiel. Nous isolons ainsi les termes utiles des paramètres S par filtrage des signaux mesurés dans le domaine fréquentiel.

L'originalité de la méthode que nous présentons réside donc dans le choix que nous avons fait de travailler dans le domaine fréquentiel et dans l'application des techniques classiques aux mesures effectuées dans ce domaine.

Nous discuterons de l'intérêt des méthodes de caractérisations utilisant des signaux mesurés en bande étroite. Nous illustrerons les étapes du traitement par des simulations. Nous évaluerons ensuite la robustesse du traitement au bruit de mesure.

⁴⁰ Kushibiki J.I., Akashi N., Sannomiya T., Chubachi N., Dunn F., *'VHF/UHF range bio-ultrasonic spectroscopy system and method'*, IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics and frequency control, vol 42, n°6, p1028-1039, nov1995

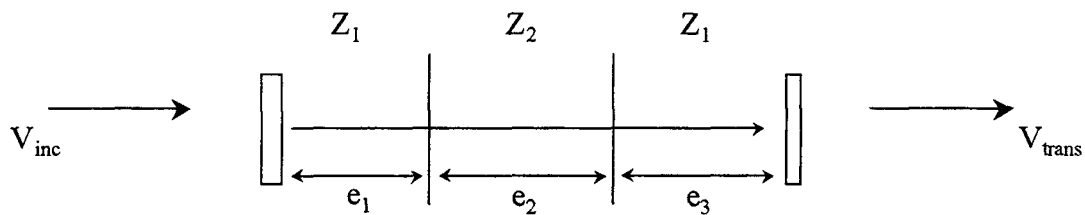
3.02 METHODES IMPULSIONNELLES

Nous connaissons les célérités et les atténuations des milieux de couplages que nous choisissons identiques et non dispersifs sur la gamme de fréquence utilisée.

Nous supposons de même que le milieu à caractériser n'est pas dispersif. Nous connaissons son épaisseur e_2 et recherchons ses caractéristiques de propagation v_2 et α_2 .

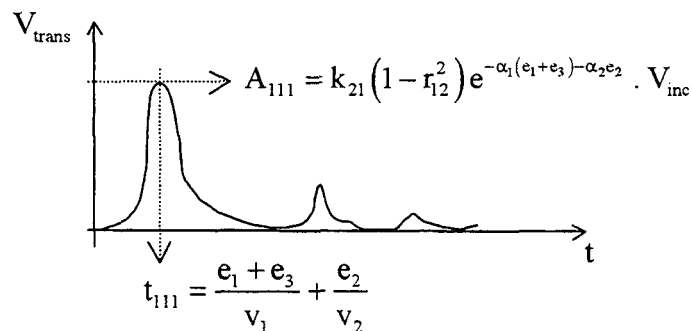
3.02-1 MESURE DE LA CELERITE

Le transducteur émetteur est excité par une impulsion ou une salve de sinusoides, suffisamment étroite pour que les différents échos d'interfaces puissent être séparés. Nous appelons V_{inc} le niveau du signal incident. Le transducteur récepteur est connecté à un oscilloscope.



Nous avons schématisé sur la figure 3-1 suivante l'allure de l'enveloppe de l'oscillogramme V_{trans} dont le niveau A_{111} et l'instant d'apparition t_{111} du premier signal transmis sont explicités avec les notations du chapitre précédent.

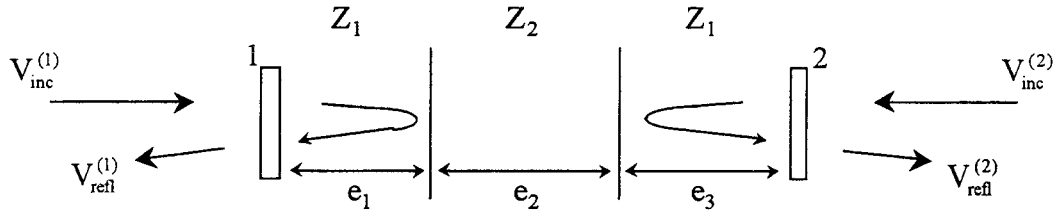
Figure 3-1 : schéma du signal transmis



La célérité de l'onde dans le milieu 2 peut être évaluée si nous connaissons les épaisseurs e_1 et e_3 des deux milieux de couplage. Un moyen simple et efficace d'y

parvenir consiste à mesurer les temps de vol dans ces milieux. Il est donc pratique de compléter la mesure en transmission par des mesures en réflexion.

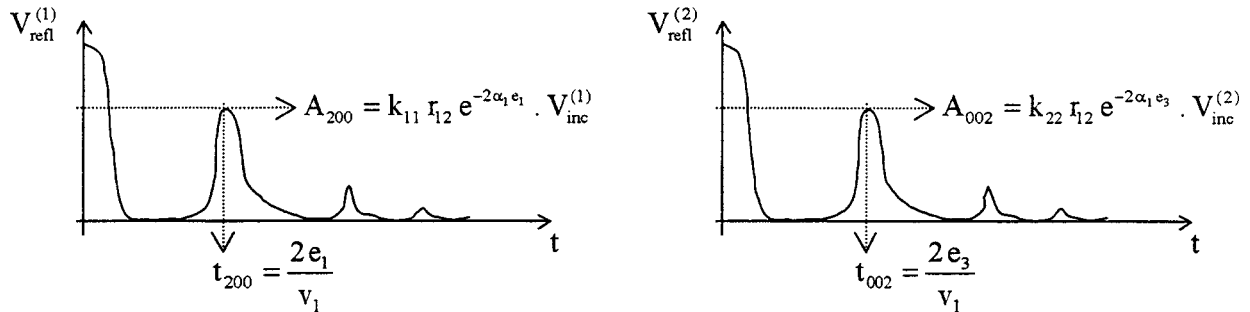
Nous mesurons alternativement les signaux réfléchis par chacune des deux faces du milieu 2.



Une première mesure est effectuée par le transducteur 1 excité comme précédemment par une impulsion ou une salve suffisamment étroite. Nous appelons $V_{inc}^{(1)}$, le niveau du signal incident. Le signal reçu $V_{refl}^{(1)}$ est mesuré par le même transducteur. Une mesure similaire est effectuée par le second transducteur.

Nous obtenons la figure 3-2 pour les instants d'apparitions des impulsions utiles et pour leurs niveaux, en utilisant les notations du chapitre précédent :

Figure 3-2 : schéma des signaux obtenus en réflexion



La mesure des retards t_{200} et t_{002} permet donc d'obtenir les épaisseurs des deux milieux de couplages. La célérité de l'onde dans le milieu 2 est calculée par :

$$v_2 = \frac{e_2}{t_{111} - \frac{(t_{200} + t_{002})}{2}}$$

3.02-2 MESURE DU COEFFICIENT D'ATTENUATION

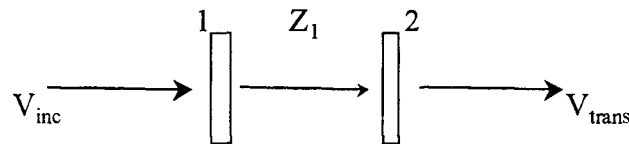
L'évaluation du coefficient d'atténuation α_2 est moins aisée. Le niveau du signal transmis étant $A_{111} = k_{21} (1 - r_{12}^2) e^{-\alpha_1(e_1 + e_2) - \alpha_2 e_2} \cdot V_{inc}^{(1)}$, il est nécessaire de connaître le coefficient de réflexion r_{12} , et le coefficient k_{21} lié à la transduction électro-acoustique. Le coefficient de réflexion r_{12} peut être connu par les mesures en réflexion à condition de connaître les coefficients de transductions k_{11} ou k_{22} . La mesure du coefficient d'atténuation nécessite une étape de caractérisation des transducteurs afin d'évaluer les coefficients de transduction.

3.02-2-a CARACTERISATION DES TRANSDUCTEURS

Les trois coefficients de transductions restant à évaluer ne dépendent que des transducteurs et des milieux de couplages. Leurs mesures sont effectuées dans une étape préliminaire de caractérisation des transducteurs.

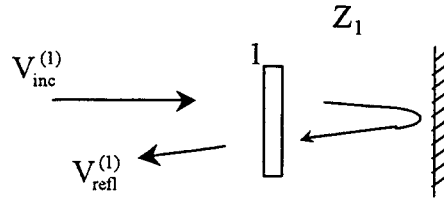
Nous affectons les niveaux des signaux reçus et leurs instants d'apparitions par l'indice supérieur (ref).

La mesure de transmission est effectuée dans le milieu de couplage.



Nous obtenons $A_{111}^{ref} = k_{21} e^{-\alpha_1 v_1 t_{111}^{ref}} \cdot V_{inc}^{(1)}$ d'où nous déduisons $k_{21} = \frac{A_{111}^{ref}}{V_{inc}^{(1)}} e^{\alpha_1 v_1 t_{111}^{ref}}$.

Nous plaçons un réflecteur parfait (coefficient de réflexion unité) dans le milieu de couplage puis nous effectuons les mesures en réflexions.



Nous obtenons pour le transducteur 1, $k_{11} = \frac{A_{200}^{\text{ref}}}{V_{\text{inc}}^{(1)}} e^{\alpha_1 v_1 t_{200}^{\text{ref}}}$.

La même mesure sur le transducteur 2 fournit $k_{22} = \frac{A_{002}^{\text{ref}}}{V_{\text{inc}}^{(2)}} e^{\alpha_1 v_1 t_{002}^{\text{ref}}}$.

3.02-2-b EVALUATION DU COEFFICIENT D'ATTENUATION

Ainsi le coefficient de réflexion peut être obtenu par :

$$r_{12} = \frac{A_{200}}{A_{200}^{\text{ref}}} e^{\alpha_1 v_1 (t_{200} - t_{200}^{\text{ref}})} = \frac{A_{002}}{A_{002}^{\text{ref}}} e^{\alpha_1 v_1 (t_{002} - t_{002}^{\text{ref}})} \quad (3.02-1)$$

et le coefficient d'atténuation par :

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1 v_1 \left(t_{111}^{\text{ref}} - \frac{t_{200} + t_{002}}{2} \right) + \text{Ln} \left[\frac{A_{111}}{A_{111}^{\text{ref}} (1 - r_{12}^2)} \right]}{-e_2} \quad (3.02-2)$$

Nous rappelons l'expression de la célérité :

$$v_2 = \frac{e_2}{t_{111} - \frac{(t_{200} + t_{002})}{2}} \quad (3.02-3)$$

3.02-3 CONCLUSION

La caractérisation ultrasonore d'un milieu d'épaisseur donnée nécessite l'évaluation des signaux transmis et réfléchis ainsi qu'une étape préliminaire de caractérisation des transducteurs.

Notons que l'utilisation des mesures effectuées en transmission sur deux échantillons d'épaisseurs différentes du milieu à étudier permet de s'affranchir de la caractérisation des transducteurs et de la mesure du coefficient de réflexion.

Les signaux transmis ont l'allure de ceux présentés précédemment. Cette méthode est particulièrement efficace lorsque les épaisseurs des milieux de couplages peuvent être conservées pour les deux mesures. Nous obtenons dans ces conditions pour les épaisseurs e_2^a et e_2^b :

$$A_{111}^a = k_{21} (1 - r_{12}^2) e^{-\alpha_1(e_1+e_3) - \alpha_2 e_2^a}, \quad t_{111}^a = \frac{e_1 + e_3}{v_1} + \frac{e_2^a}{v_2}$$

$$A_{111}^b = k_{21} (1 - r_{12}^2) e^{-\alpha_1(e_1+e_3) - \alpha_2 e_2^b}, \quad t_{111}^b = \frac{e_1 + e_3}{v_1} + \frac{e_2^b}{v_2}$$

D'où nous pouvons facilement tirer :

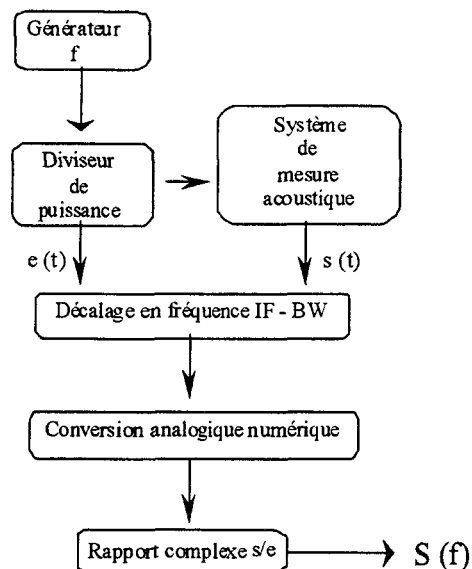
$$\alpha_2 = \frac{\text{Ln} \left(\frac{A_{111}^b}{A_{111}^a} \right)}{-(e_2^b - e_2^a)} \quad \text{et} \quad v_2 = \frac{e_2^b - e_2^a}{t_{111}^b - t_{111}^a} \quad (3.02-4)$$

Cette méthode est de loin plus précise que celle que nous avons présenté. Permettant de s'affranchir des mesures des fonctions de transduction, le cumul d'erreur sur les mesures est moindre. Elle permet d'atteindre des erreurs relatives sur les coefficients d'atténuation de l'ordre de quelques pour cents et sur les célérités de l'ordre de quelques dixièmes de pour cents. Elle n'est cependant pas applicable à nos travaux. Les contraintes techniques de fabrication des céramiques d'hydroxy apatite ne permettent pas d'en obtenir d'épaisseur supérieure à 1 cm, qui se trouve être la limite de séparation des échos internes.

3.03 METHODE HARMONIQUE

3.03-1 MESURE DES PARAMETRES S

Les paramètres S sont mesurés par le biais d'un analyseur de réseau. Le schéma de principe des analyseurs de réseau modernes est le suivant :



Le générateur émet une tension électrique sinusoïdale. Elle est divisée en deux parties par un diviseur de puissance. L'une d'entre elles constitue le signal de référence $e(t)$, l'autre est injectée dans le système de mesure et constitue le signal d'excitation du transducteur émetteur. La sortie $s(t)$ du système de mesure est réinjecté dans l'analyseur de réseau.

On impose une durée des signaux longue par rapport à leur temps de propagation. Il s'instaure alors un régime d'ondes stationnaires dans le système acoustique. La tension $s(t)$ est le résultat de ces ondes stationnaires. Son amplitude et son déphasage par rapport au signal de référence dépendent de la fréquence émise. La valeur du paramètre S à la fréquence f est obtenue à partir de la mesure de cette amplitude et de ce déphasage. Afin d'optimiser la précision de ces mesures il sera nécessaire d'observer les signaux pendant un temps suffisamment long, c'est à dire en les filtrant sur une bande suffisamment étroite. Ce traitement réduit considérablement le bruit de la mesure.

Concrètement, les deux signaux $e(t)$ et $s(t)$ sont décalés en fréquence autour d'une fréquence intermédiaire IF et ensuite, filtrés dans une bande BW pouvant descendre à quelques dizaines de Hertz. Les deux signaux sont ensuite numérisés puis la division complexe $s(t)/e(t)$ est effectuée. La mesure est répétée à d'autres fréquences sur une gamme spécifiée. Nous avons alors accès aux versions numérisées des paramètres S du système.

3.03-2 CARACTERISATION DANS LE DOMAINE TEMPOREL

Les méthodes présentées dans le paragraphe 3.02 peuvent être utilisées. Nous effectuons la mesure des paramètres S puis nous calculons leurs transformées de Fourier inverse. Nous cherchons à utiliser ces données à la place de celle que nous obtiendrions sur un oscilloscope pour caractériser le milieu à étudier.

Les modules des transformées de Fourier inverses des paramètres S sont constitués d'une série d'impulsions. Ces impulsions ne seront effectivement observables que si la largeur de bande Δf sur laquelle les paramètres S sont mesurés est suffisamment grande. En appelant Δt le retard entre deux impulsions consécutives, elles ne pourront être séparées que si le critère de Rayleigh, $\Delta t \cdot \Delta f \geq 1$ est respecté.

Sur le plan expérimental, nous n'avons accès qu'aux estimations des instants d'apparition des impulsions utiles. Les produits de convolutions peuvent décaler leurs positions, conduisant à une mauvaise estimation des instants t_{npq} . Les fonctions liées à la transduction variant lentement avec la fréquence, il est possible de limiter leurs influences en réduisant au maximum la bande fréquentielle de mesure.

Comme les impulsions utiles sont celles apparaissant à t_{200} pour S_{11} , t_{002} pour S_{22} et t_{111} pour S_{21} , on diminue la bande de mesure jusqu'à la limite de séparation de ces seules impulsions avec leurs voisines⁴¹.

On peut généralement choisir l'épaisseur des milieux de couplages, le critère de séparation est alors exprimé en fonction des caractéristiques du milieu étudié. Ainsi dans le cadre du critère de Rayleigh, et pour une fenêtre de mesure rectangulaire :

$$\Delta f = \frac{v_2}{e_2}.$$

Si le milieu est dispersif, cette méthode permet uniquement d'évaluer les caractéristiques de propagation 'moyennes' sur la plage de fréquence utilisée.

⁴¹Deblock Y., "Caractérisation ultrasonore haute fréquence des propriétés viscoélastiques de milieux liquides", p76-79, thèse de doctorat, Université de Valenciennes, jun 1997

3.03-3 CARACTERISATION DANS LE DOMAINE FREQUENTIEL

Nous recherchons les caractéristiques du matériau étudié en fonction de la fréquence. Contrairement à la méthode de caractérisation dans le domaine temporel, pour laquelle nous avons intérêt de choisir une bande fréquentielle la plus faible possible, nous choisissons ici une bande la plus importante possible afin d'évaluer la dispersion du matériau sur la plus large gamme de fréquence possible en une seule mesure.

Le principe de la caractérisation reste proche de celui que nous avons introduit dans la méthode de caractérisation dans le domaine temporel. Les termes utiles sont, comme dans le cas précédent, ceux correspondants aux premiers termes de chaque paramètre S^{ac} :

$$S_{11} = S_{11}^{\infty} - K_{11} r_{12} t_{10} e^{-2\alpha_1 e_1} e^{-i 2\pi f \frac{2e_1}{v_1}} - \sum \dots \quad (3.03-1)$$

$$S_{22} = S_{22}^{\infty} - K_{22} r_{32} t_{34} e^{-2\alpha_3 e_3} e^{-i 2\pi f \frac{2e_3}{v_3}} - \sum \dots \quad (3.03-2)$$

$$S_{21} = K_{21} t_{12} t_{23} e^{-\alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \alpha_3 e_3} e^{-i 2\pi f \left(\frac{e_1}{v_1} + \frac{e_2}{v_2} + \frac{e_3}{v_3} \right)} + \sum \dots \quad (3.03-3)$$

La visualisation des signaux dans le domaine temporel permet de définir les réponses impulsionnelles des filtres (fenêtres d'effacement) qui permettront d'isoler les termes utiles du reste du signal.

Pour s'affranchir des effets de la transduction, nous divisons les signaux mesurés par les réponses des transducteurs déterminées dans l'étape préliminaire de leurs caractérisations. Nous appellerons cette étape, l'égalisation des signaux. Les fonctions égalisatrices dépendent ici de la fréquence.

Lors de la caractérisation d'un milieu poreux, le coefficient de réflexion à sa surface, r_{12} peut être faible. Dans ce cas, l'impulsion utile est noyée dans les lobes secondaires associés à l'impulsion s_{ii}^{∞} , représentant la réflexion du signal électrique sur le transducteur. Nous ne pouvons alors estimer sa position, et donc définir le filtre. Comme les termes S_{ii}^{∞} ne dépendent que des impédances électriques des transducteurs, nous les estimons dans l'étape préliminaire de caractérisation des transducteurs. Il suffira ensuite de les retrancher aux paramètres de réflexions S_{ii} mesurés en présence du milieu poreux pour rendre utilisable leurs représentations temporelles.

3.03-3-a CHOIX DES FENETRES D'EFFACEMENT

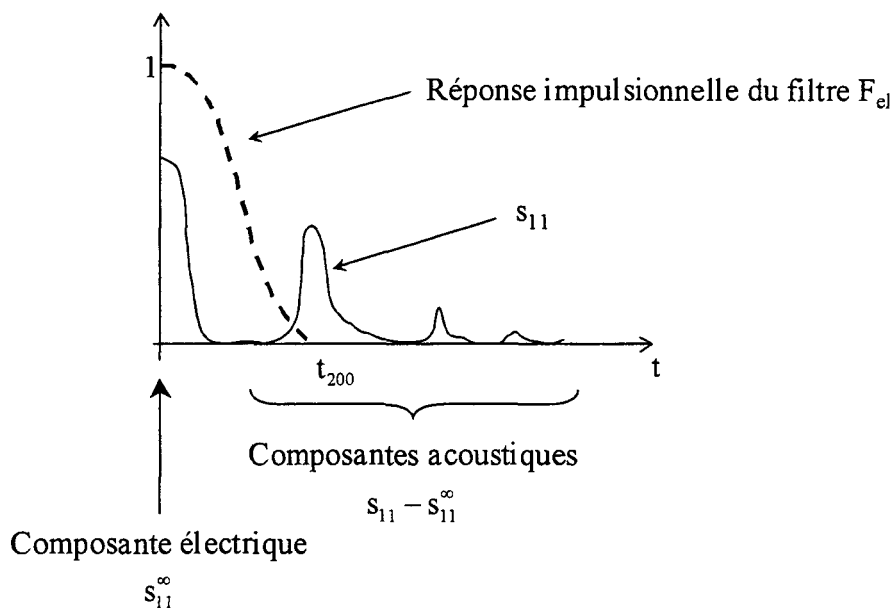
✓ Fenêtre 'composante électrique' :

Les paramètres S de réflexion se décomposent en termes de nature purement électrique, S_{ii}^∞ , décrivant la réflexion du signal électrique d'excitation à la surface du transducteur et en termes de natures électroacoustique $S_{ii} - S_{ii}^\infty$, décrivant les réflexions des ondes acoustiques dans les milieux. Par exemple pour le paramètre S_{11}

$$S_{11} = \underbrace{S_{11}^\infty}_{\substack{\downarrow \\ \text{Réfléchi} \\ \text{électrique}}} - \underbrace{K_{11} \Gamma_{12} t_{10} e^{-2\alpha_1 e_1} e^{-i 2\pi f \frac{2e_1}{v_1}} - \sum \dots}_{\substack{\text{Réfléchis} \\ \text{acoustiques}}}$$

Nous appellerons ces termes les composantes électrique et acoustique des paramètres S.

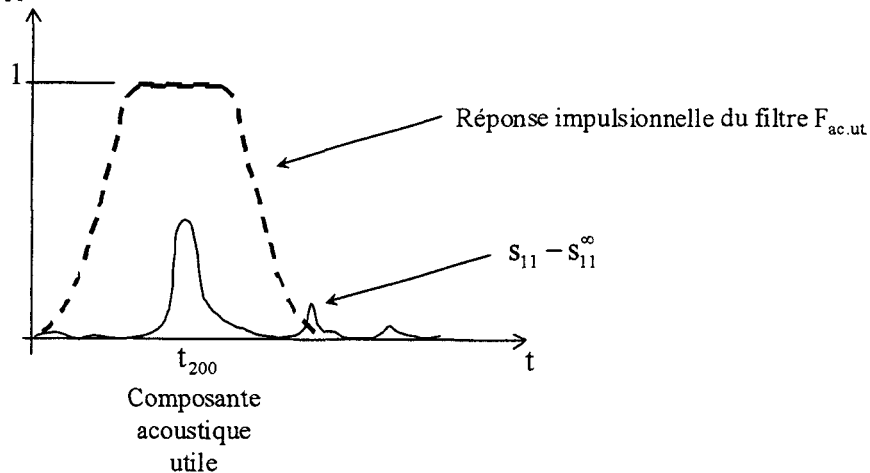
La réponse impulsionnelle du filtre F_{el} permettant d'évaluer la composante électrique est obtenue en utilisant la représentation temporelle du paramètre S. Par exemple pour le paramètre S_{11} :



Un filtre à moyenne mobile dans le domaine fréquentiel est utilisé pour réaliser cette opération. Ses coefficients B_i sont calculés d'après une fenêtre de Hann puis normalisés. Son ordre P est égal à $\frac{1}{t_{200} df}$, df étant l'incrément de fréquence.

✓ Fenêtre 'composante acoustique utile' :

Nous devons isoler les composantes acoustiques utiles des autres composantes acoustiques représentant les multiples réflexions des ondes acoustiques dans les milieux. Nous utilisons un filtre, noté $F_{ac.ut.}$, dont la réponse impulsionnelle est obtenu à l'aide de la représentation temporelle des paramètres S. Par exemple pour le paramètre S_{11} :



Pour une fenêtre centrée sur l'impulsion utile apparaissant en t_{npq} , nous choisissons une atténuation maximale de 12dB en $t \pm \Delta t$. $\Delta t = t_{n,p+2,q} - t_{npq}$ représente le temps d'un aller-retour dans le milieu étudié.

Nous choisissons une fenêtre de Chebyshev de type 2 qui ne présente pas d'ondulation dans sa bande passante.

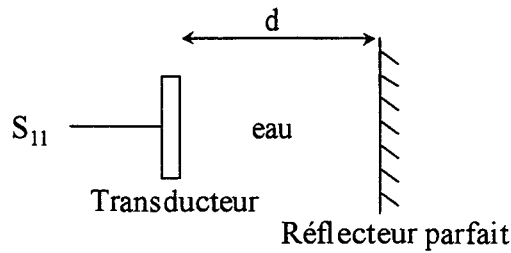
Les coefficients du filtre étant déterminés, nous effectuerons un filtrage direct et rétrograde qui rend le filtrage non dispersif temporellement. Le filtrage d'un signal induit toujours une atténuation du niveau de ce signal. Afin de palier, dans une certaine mesure à cet effet, nous conservons la même largeur de fenêtre pour les filtrages des trois paramètres S, qu'ils soient mesurés sur les milieux de référence ou sur le milieu à caractériser.

3.03-3-b CARACTERISATION DES TRANSDUCTEURS

✓ caractérisation en réflexion

Nous rappelons l'expression d'un paramètre de réflexion (2.05-1)

$$S_{11} = S_{11}^{\infty} - K_{11} t_{10} e^{-2\alpha_1 e_1} e^{-i 2\pi f \frac{2e_1}{v_1}} - \sum \dots, \text{ en choisissant un coefficient de réflexion } r_{12}=1.$$



✓ Evaluation de S_{11}^{∞} :

Le paramètre S_{11} est mesuré. Nous calculons sa transformée de Fourier inverse puis estimons le retard t_{200} de l'impulsion utile.

L'évaluation de la composante électrique du signal est ensuite réalisée à l'aide du filtre à moyenne mobile F_{el} .

✓ Evaluation des fonctions de transductions K_{11} t_{10}

La composante acoustique de S_{11} est obtenue en lui retranchant sa composante électrique :

$$S_{11}^{ref} - S_{11}^{\infty} = -K_{11} t_{10} e^{-2\alpha_1 d} e^{-i 2\pi f \frac{2d}{v_1}} - \sum \dots$$

Cette composante n'est pas encore utilisable car elle contient les termes associés à tous les allers-retours dans les trois milieux. Nous devons en filtrer l'impulsion utile. Nous utilisons pour ceci le filtre $F_{ac.ut.}$ dont la réponse impulsionnelle est centrée sur l'impulsion utile du paramètre S_{11} .

La même méthode est appliquée sur le paramètre S_{22} . Soient :

$$\hat{S}_{11}^{ref} = -K_{11} t_{10} e^{-2\alpha_1 d} e^{-i 2\pi f \frac{2d}{v_1}}$$

$$\hat{S}_{22}^{ref} = -K_{22} t_{34} e^{-2\alpha_1 d} e^{-i 2\pi f \frac{2d}{v_1}}$$

Nous obtenons les fonctions de transduction en démodulant les signaux de référence en amplitude et en corrigeant l'absorption dans l'eau.

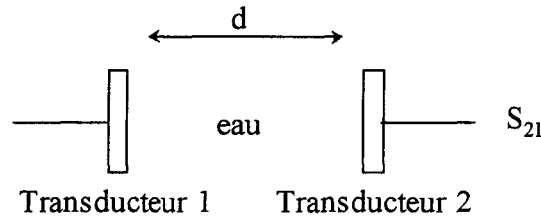
$$K_{11} t_{10} = -\hat{S}_{11}^{ref} e^{2\alpha_1 d} e^{i 2\pi f \frac{2d}{v_1}}$$

$$K_{22} t_{34} = -\hat{S}_{22}^{ref} e^{2\alpha_1 d} e^{i 2\pi f \frac{2d}{v_1}}$$

✓ caractérisation en transmission :

Nous reprenons l'expression du paramètre S_{21} (2.05-3) dans le cas où $t_{12}=t_{23}=1$.

$$S_{21} = K_{21} e^{-\alpha_1 d} e^{-i2\pi f \frac{d}{v_1}} + \sum \dots$$



Une fois le paramètre S_{21} mesuré et sa transformée de Fourier inverse calculée, la position t_{111} de l'impulsion utile est estimée. La réponse impulsionnelle du filtre $F_{ac.ut.}$ est centré sur t_{111} . Nous obtenons après démodulation et correction de l'absorption dans le milieu de couplage :

$$K_{21} = \hat{S}_{21}^{ref} e^{\alpha_1 d} e^{i2\pi f \frac{d}{v_1}}$$

✓ Fonctions de transductions

Les fonctions de transductions introduisent des fluctuations sur le module et la phase. Le module présente une forme de cloche dont le maximum correspond à la fréquence de résonance du transducteur. La loi d'évolution de la phase n'est pas linéaire vis à vis de la fréquence. Ces fonctions ne sont jamais nulles dans la bande de fonctionnement des transducteurs. Elles affichent quelques ondulations résiduelles au filtrage et nécessitent d'être lissées.

Nous recherchons les polynômes $P_m(f)$ et $P_p(f)$ d'ordre suffisant pour lisser le module et la phase des fonctions de transductions.

Soit $R_{11} = P_m(f) e^{iP_p(f)}$, la fonction de transduction lissée associée au paramètre S_{11} .

Nous l'appellerons la fonction égalisatrice du paramètre S_{11} .

Nous appliquons la même méthode sur les deux autres paramètres et obtenons les fonctions égalisatrices R_{22} et R_{21} .

3.03-3-c EGALISATION DES PARAMETRES S

La division des paramètres S par les fonctions égalisatrices permet d'éliminer les effets de transduction. Les paramètres S égalisés ne dépendent plus que des caractéristiques de propagation.

Nous disposons des trois paramètres S mesurés sur le milieu à caractériser qui ont été filtrés comme expliqué précédemment, et des trois fonctions égalisatrices.

Nous obtenons les signaux égalisés suivants :

$$\begin{aligned}\frac{\hat{S}_{11}}{R_{11}} &= r(f) e^{-2\alpha_1 e_1} e^{-i 2\pi f \frac{2e_1}{v_1}} \\ \frac{\hat{S}_{22}}{R_{22}} &= r(f) e^{-2\alpha_1 e_3} e^{-i 2\pi f \frac{2e_3}{v_1}} \\ \frac{\hat{S}_{21}}{R_{21}} &= [1 - r^2(f)] e^{-\alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \alpha_1 e_3} e^{-i 2\pi f \left(\frac{e_1}{v_1} + \frac{e_2}{v_2} + \frac{e_3}{v_1} \right)}\end{aligned}\quad (3.03-4)$$

Dans lesquels $r(f)$ représente le coefficient de réflexion sur le milieu étudié :
 $r_{12}(f) = r_{32}(f) = r(f)$

3.03-3-d EXTRACTION DES CARACTERISTIQUES DU MILIEU

Le module des paramètres de réflexion permet d'obtenir le coefficient de réflexion sur le milieu étudié. Nous corrigeons l'absorption dans les milieux de couplage :

$$r(f) = \left| \frac{\hat{S}_{11}}{R_{11}} \right| e^{\alpha_1 v_1 t_{200}} = \left| \frac{\hat{S}_{22}}{R_{22}} \right| e^{\alpha_1 v_1 t_{002}} \quad (3.03-5)$$

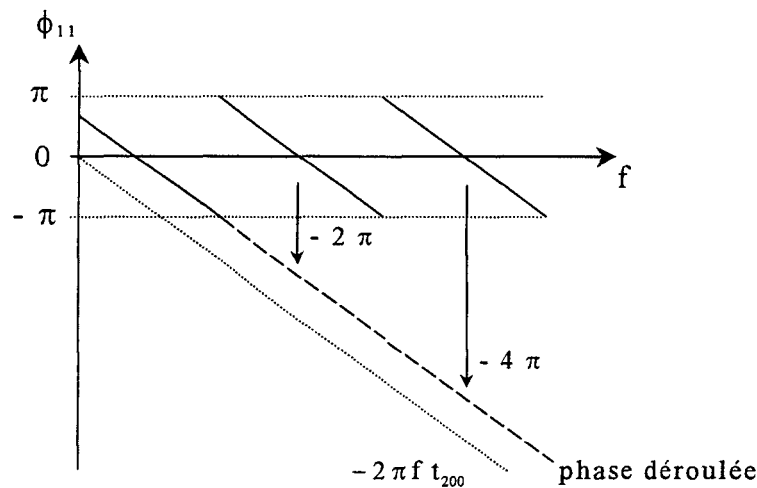
Le coefficient d'atténuation peut être alors obtenu :

$$\alpha_2(f) = \frac{\alpha_1 v_1 \left(\frac{t_{200} + t_{002}}{2} \right) + \ln \left(\left| \frac{\hat{S}_{21}}{R_{21}} \right| \frac{1}{1 - r(f)^2} \right)}{-e_2} \quad (3.03-6)$$

et la célérité par :

$$v_2(f) = \frac{-2\pi f e_2}{\phi_{21} - \frac{\phi_{11} + \phi_{22}}{2}} \quad (3.03-7)$$

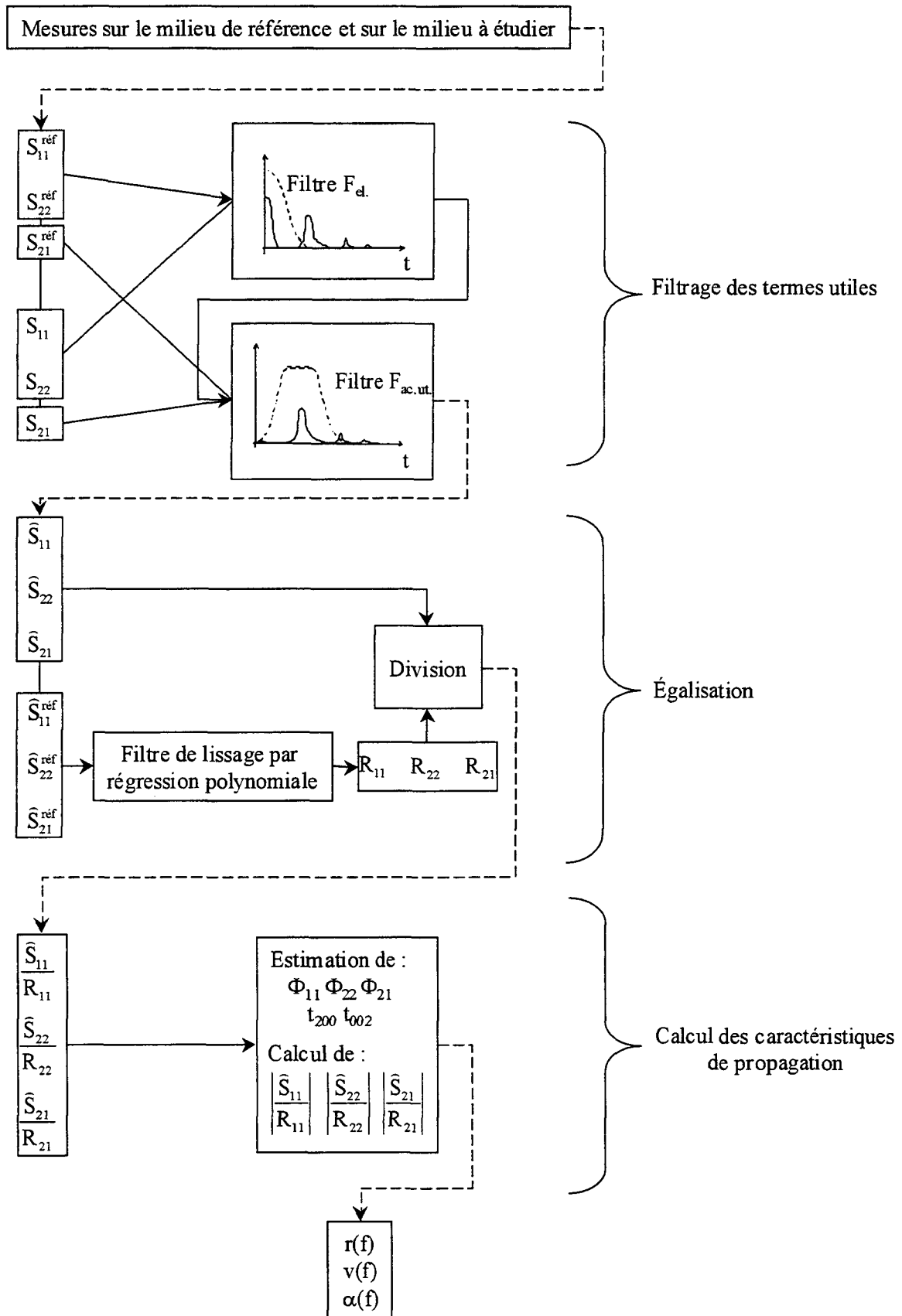
où ϕ_{ii} représentent les phases des paramètres S filtrés et égalisés. Ces phases ne peuvent être connues de façons absolues, puisque assujetties à l'indétermination de $2n\pi$ résultant de l'utilisation de la fonction arc tangente. Contenues dans l'intervalle $[-\pi, \pi[$, nous leurs retranchons la quantité 2π après chaque discontinuité. Cette opération de déroulement de la phase est schématisée sur la figure suivante :



Une fois déroulées, les phases ϕ_{11} et ϕ_{22} sont supposées être linéaires. Comme ce n'est pas toujours le cas en pratique, nous leurs retranchons leurs ordonnées à l'origine obtenues par régression linéaire.

Nous ne pouvons théoriquement pas appliquer cette méthode pour obtenir la phase ϕ_{21} , elle n'est pas linéaire puisque le milieu est dispersif. Nous lui conservons un certain degré de liberté en ne lui retranchant que le modulo 2π de l'ordonnée à l'origine. Une variation de 2π sur la phase ϕ_{21} entraîne une variation d'autant plus importante de la célérité que la fréquence est faible. Dans notre cas cette variation est importante, nous calculons alors plusieurs célérités pour lesquelles un facteur 2π a été ajouté ou retranché à la phase ϕ_{21} . Il est nécessaire d'avoir une connaissance à priori sur l'ordre de grandeur de la célérité dans le milieu étudié pour pouvoir choisir l'une des trois célérités calculées.

3.03-3-e SCHEMA SYNOPTIQUE DE LA TECHNIQUE DE TRAITEMENT DU SIGNAL



3.04 INTERET DE LA METHODE HARMONIQUE

Le principal intérêt de la méthode harmonique réside dans l'excellent rapport signal sur bruit qu'elle permet d'obtenir. Ce rapport signal sur bruit dépend de la bande fréquentielle contenant les signaux mesurés. Le filtre d'entrée BW de l'analyseur de réseau permet de choisir une bande ajustable d'une dizaine de Hertz à quelques centaines de kiloHertz.

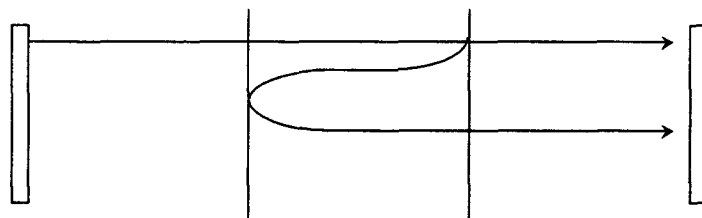
3.04-1 CAS DE LA CARACTERISATION DANS LE DOMAINE TEMPOREL

Comme les informations contenues dans les représentations temporelles des paramètres S sont équivalentes aux informations mesurées à l'oscilloscope dans le domaine temporel, il peut sembler plus judicieux d'effectuer les mesures dans le domaine temporel directement accessible. Cela évite d'avoir à calculer les transformées de Fourier inverse des paramètres S.

Nous allons justifier le choix fait ici d'effectuer les mesures dans le domaine fréquentiel.

Le transducteur émetteur est connecté à un générateur de salves. Le récepteur à un oscilloscope. Le support spectral des signaux observés sur l'oscilloscope est de quelques centaines de MégaHertz. Nous gagnons en précision si les mesures sont effectuées dans un bon rapport signal sur bruit. La puissance du bruit récolté par l'oscilloscope est liée la bande de réception.

Kushibiki⁴² la réduit à quelques dizaines de MégaHertz. Dans ce cas, les ondes acoustiques interfèrent dans l'échantillon.

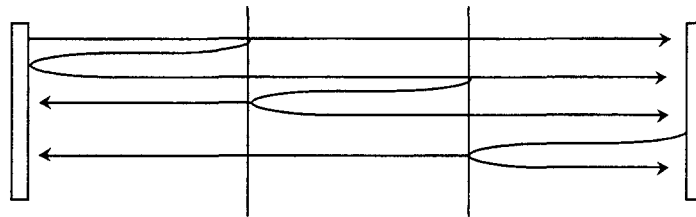


L'amplitude des signaux récoltés sur l'oscilloscope passe par une série de maxima et de minima régulièrement espacés quand on fait varier la fréquence du signal émis. La

⁴² Kushibiki J.I., Akashi N., Sannomiya T., Chubachi N., Dunn F., 'VHF/UHF range bio ultrasonic spectroscopy system and method', IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics and frequency control, vol 42, n°6, p1028-1039, nov1995

'période' de ces oscillations est lié au temps de vol dans l'échantillon. Elle est obtenue par transformé de Fourier. Cette méthode est aujourd'hui l'une des plus précises.

Deblock⁴³ présente une méthode de caractérisation pour laquelle la bande de réception est encore plus faible. Chaque point de mesure, collecté sur quelques kiloHertz seulement, est très peu affecté par le bruit. Tous les signaux se réfléchissant sur toutes les interfaces se recouvrent et interfèrent.



Il n'est plus possible d'isoler le signal correspondant à la traversé de l'échantillon sur un oscilloscope. La visualisation des signaux dans le domaine temporel perd son intérêt. On utilise alors un analyseur de réseau et la mesure des paramètres S_{21} . La bande de fréquence sur laquelle est effectuée la mesure doit être suffisamment large pour pouvoir séparer les principaux échos transmis dans le domaine temporel. Inférieure ou égale à la bande passante des transducteurs, elle est en général beaucoup plus faible que la bande de réception d'un oscilloscope.

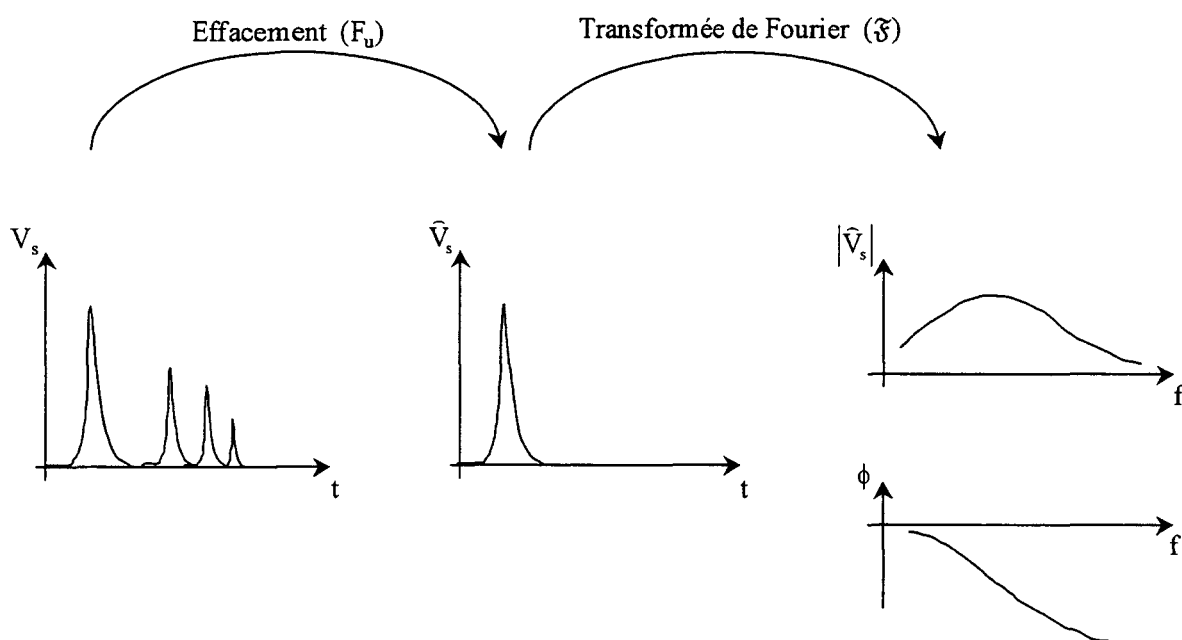
Notons que comme dans la méthode précédente, il est nécessaire, de calculer une transformée de Fourier.

⁴³ Deblock Y., *"Caractérisation ultrasonore haute fréquence des propriétés viscoélastiques de milieux liquides"*, p104-114, thèse de doctorat, Université de Valenciennes, juin 1997

3.04-2 CAS DE LA CARACTERISATION D'UN MILIEU DISPERSIF

Un milieu est dispersif si ses caractéristiques de propagation dépendent de la fréquence. On cherche alors à représenter les évolutions avec la fréquence de la célérité de l'onde s'y propageant et de l'atténuation qu'elle subit.

La technique suivante est généralement utilisée⁴⁴. Un générateur de salve émet une impulsion large bande. Les transducteurs sont adaptés et amortis afin qu'ils présentent une bande passante la plus large possible. Les signaux reçus sont mesurés sur un oscilloscope large bande (500 MHz). Les impulsions d'intérêt sont sélectionnées par filtrage (fenêtre d'effacement) et leur contenu spectral est obtenu par transformée de Fourier.



Connaissant le module et la phase du signal transmis, on obtient les caractéristiques de propagation en renouvelant l'expérience sur un milieu d'épaisseur différente, ou en appliquant le même type de méthode sur les signaux réfléchis.

Le signal est bien localisé dans le domaine temporel. Son spectre est large. L'appareil de mesure nécessairement large bande recueille un signal bruité. Nous retrouvons le même intérêt que précédemment à la méthode harmonique.

⁴⁴ Sachse W., Pao Y-H., 'On the determination of phase and group velocities of dispersive waves in solids', J. Appl. Phys., 49(8) p4320-4327, Aug 1978

Comparativement à la méthode impulsionnelle pour laquelle il faut calculer le spectre du signal, la méthode harmonique effectue directement la mesure dans le domaine fréquentiel, ce qui permet d'obtenir directement les informations fréquentielles sur le milieu dispersif avec un très bon rapport signal sur bruit.

Elle ne comporte cependant pas que des avantages. En tant que méthode interférométrique elle se révèle très sensible aux vibrations des supports et assez délicate à mettre en œuvre. Etant habitué à analyser des signaux dans le domaine temporel, l'expérimentateur doit acquérir une expertise dans l'interprétation des signaux dans le domaine fréquentiel.

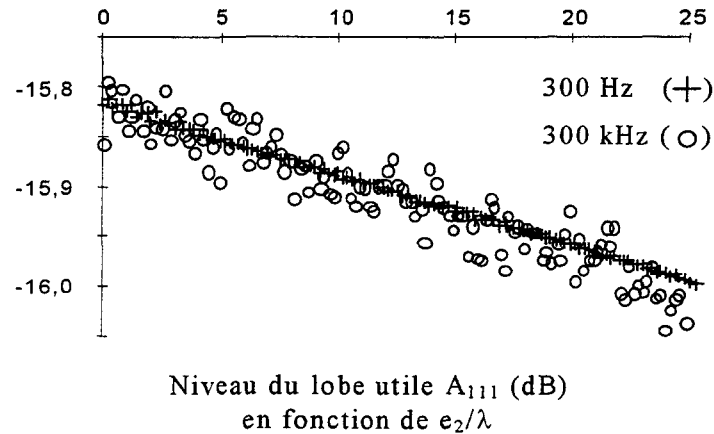
3.04-3 INFLUENCE DU FILTRE D'ENTREE BW

Nous essayons d'illustrer l'effet de largeur de filtre BW sur la mesure A_{111} du niveau de l'impulsion utile dans le domaine temporel. Nous en tirerons une idée sur le lien existant entre la largeur de filtre BW et l'erreur sur la mesure de l'atténuation.

La valeur A_{111} du maximum du module de S_{21} diminue avec la profondeur de milieu 2 traversé. Cette diminution doit être linéaire avec la profondeur, le coefficient directeur de la droite devant être obtenue est α_2 . Le bruit de mesure introduit une dispersion autour de cette droite. Afin de pouvoir faire varier continûment l'épaisseur du milieu 2 nous prenons un milieu liquide. Les milieux de couplages sont remplacés par des milieux solides. Nous utilisons donc des transducteurs possédant des lignes à retard. Un des deux transducteurs est monté sur une table de déplacement motorisée, la mesure du paramètre S_{21} est réalisée, sa transformée de Fourier inverse calculée, le maximum A_{111} du module est enfin recherché, puis enregistrée. Nous modifions l'épaisseur e_2 de la couche d'eau puis nous répétons la mesure.

Les mesures sont effectuées avec une paire de transducteurs résonants à 20 MHz. Le niveau du signal émis est de 0 dBm. Nous avons choisi de l'eau comme milieu de mesure. Ce milieu présente trop peu de pertes pour faire apparaître clairement l'influence de la largeur du filtre d'entrée. Nous avons introduit un atténuateur de -40 dB en réception, puis rajouté cette valeur à celle de A_{111} pour tracer la figure 3-3 suivante. Elle présente les résultats obtenus en utilisant une bande de réception de 300Hz(+) et de 300kHz(o) pour lesquelles nous avons fait varier l'épaisseur d'eau de zéro à vingt cinq longueurs d'onde. La mesure a été effectuée sur une bande totale de 1,5 MHz.

Figure 3-3 : Niveau reçu en fonction de l'épaisseur de liquide traversé



La dispersion des mesures met en évidence l'effet du filtre d'entrée. Les régressions linéaires fournissent dans les deux cas des valeurs du coefficient d'atténuation en bon accord (erreur < 1%) avec celle référencée.

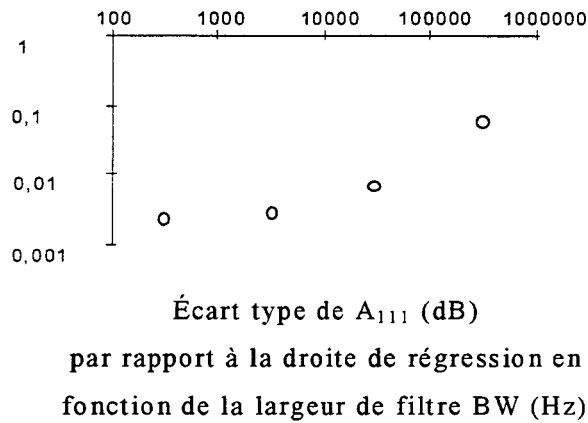
Afin de mieux quantifier les erreurs, nous présentons sur la figure 3-4 la dispersion des mesures en terme d'écart type par rapport à la valeur obtenue par régression linéaire pour différentes valeurs de filtres BW. Il est très faible pour une largeur de filtre de 300 Hz, environ -50 dB.

Nous avons pu obtenir cette grande sensibilité grâce à :

- ✓ la qualité de l'appareillage électronique mis en jeu (analyseur de réseau Hewlett Packard), transducteurs adaptés⁴⁵
- ✓ au grand soin que nous avons mis dans la recherche d'un protocole expérimental adéquat, nous le détaillerons dans le paragraphe 4.03
- ✓ au choix judicieux des éléments mécaniques du système expérimental, notamment des supports des transducteurs. La mesure interférentielle étant extrêmement sensible aux vibrations des transducteurs.

⁴⁵ Deblock Y., Campistron P., Lippert M., Bruneel C., "Electrical characterization of plate piezo electric transducer bounded to a finite substrate", J. Acoust. Soc. Am. 111 (6) pp 2681-2685, jun 2002

Figure 3-4 : *Ecart type sur le niveau en fonction de la largeur de bande en réception*



Le niveau d'émission est de 0 dBm, les conversions électro-acoustiques et les transmissions ligne à retard/eau prélèvent environ 16 dB au signal, nous avons atténué le signal reçu de 40 dB, la mesure est donc faite sur un signal dont le niveau est de l'ordre de -56 dBm. Ainsi, pour un niveau du signal reçu supérieur à -56 dBm, une largeur de filtre BW de 1kHz semble suffisante pour effectuer une mesure correcte de l'atténuation. Les erreurs sur l'évaluation de la célérité, dues la largeur du filtre BW sont moindres.

Nos mesures seront effectuées à des fréquences beaucoup plus faibles, de 300 kHz à 3 MHz. Le phénomène que nous venons d'illustrer à une fréquence bien supérieure explique néanmoins la qualité en terme de rapport signal à bruit de nos mesures.

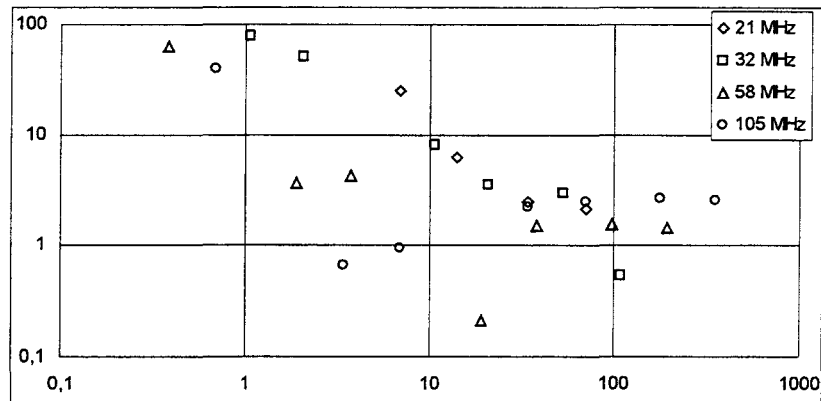
3.04-4 ÉVALUATION DE LA PRECISION

Dans le cas de la caractérisation d'un milieu solide, les évaluations de la célérité et du coefficient d'atténuation ne peuvent être effectuées par la méthode que nous venons de présenter puisque nous ne pouvons faire varier continûment l'épaisseur du matériau. Il nous a paru intéressant d'estimer les erreurs apparaissant dans le cas d'une estimation basée sur les signaux mesurés pour deux épaisseurs d'eau (équation 3.02-4) et de vérifier qu'elles sont indépendantes de la fréquence à laquelle sont effectuées les mesures. Nous effectuons donc la mesure de l'atténuation et de la célérité pour deux épaisseurs d'eau entre les transducteurs, les valeurs des célérités et des coefficients d'atténuation obtenues sont moyennées sur une dizaine de mesure.

Nous reproduisons ces mesures pour différentes épaisseurs d'eau, puis à différentes fréquences, en utilisant quatre paires de transducteurs.

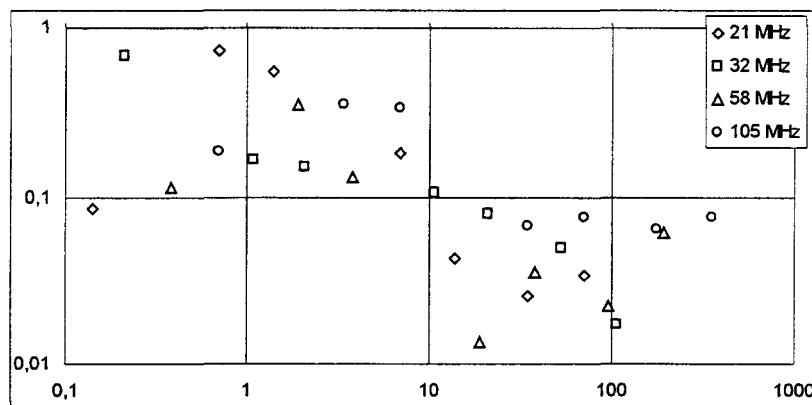
Nous présentons les résultats de ces expériences sur les figures 3-5 et 3-6 suivantes, pour lesquelles nous avons calculé les erreurs entre nos mesures et les valeurs de références obtenues dans la littérature^{46/47}.

Figure 3-5 : *Erreur sur l'atténuation en fonction du rapport épaisseur liquide/ λ*



Erreur sur l'atténuation (%)
en fonction du rapport
épaisseur de liquide/ λ

Figure 3-6 : *Erreur sur la célérité en fonction du rapport épaisseur de liquide/ λ*



Erreurs sur la célérité (%)
en fonction du rapport épaisseur/ λ

⁴⁶ Pinkerton J.M.M, 'The absorption of ultrasonic waves in liquid and its relation to molecular constitution', Proc.Phys.Soc., vol B20, pp 129-141, 1949

⁴⁷ Kroebel W., Mahrt K.-H., 'Recent result on absolute sound velocity measurements in pure water and sea water at atmospheric pressure', Acustica, vol 35, pp 154-164, 1976

Il n'apparaît pas de différences de comportement entre les mesures effectuées à des fréquences différentes.

Les erreurs apparaissant dans les évaluations du coefficient d'atténuation et de la célérité sont importantes pour de faibles épaisseurs ($< 10\lambda$). Cela est en partie dû à la précision de la table de déplacement ($0,1 \mu\text{m}$) et reflète les erreurs que nous pourrions obtenir sur un matériau solide dont l'épaisseur est mal estimée. Elles se stabilisent ensuite aux environs de 2 % pour le coefficient d'atténuation et de 0,1 % pour la célérité pour une épaisseur supérieure à cinquante longueurs d'ondes.

Notons que dans le cas de la caractérisation d'un solide, les erreurs dues à son état de surface et au réglage de son parallélisme par rapport aux transducteurs viennent se superposer à celles que nous venons d'évaluer. Ces erreurs sont indépendantes du type d'excitation électrique choisi, impulsionnelle ou harmonique. La qualité des résultats que nous venons de produire confirme donc le choix que nous avons fait d'utiliser un système de mesure en régime harmonique.

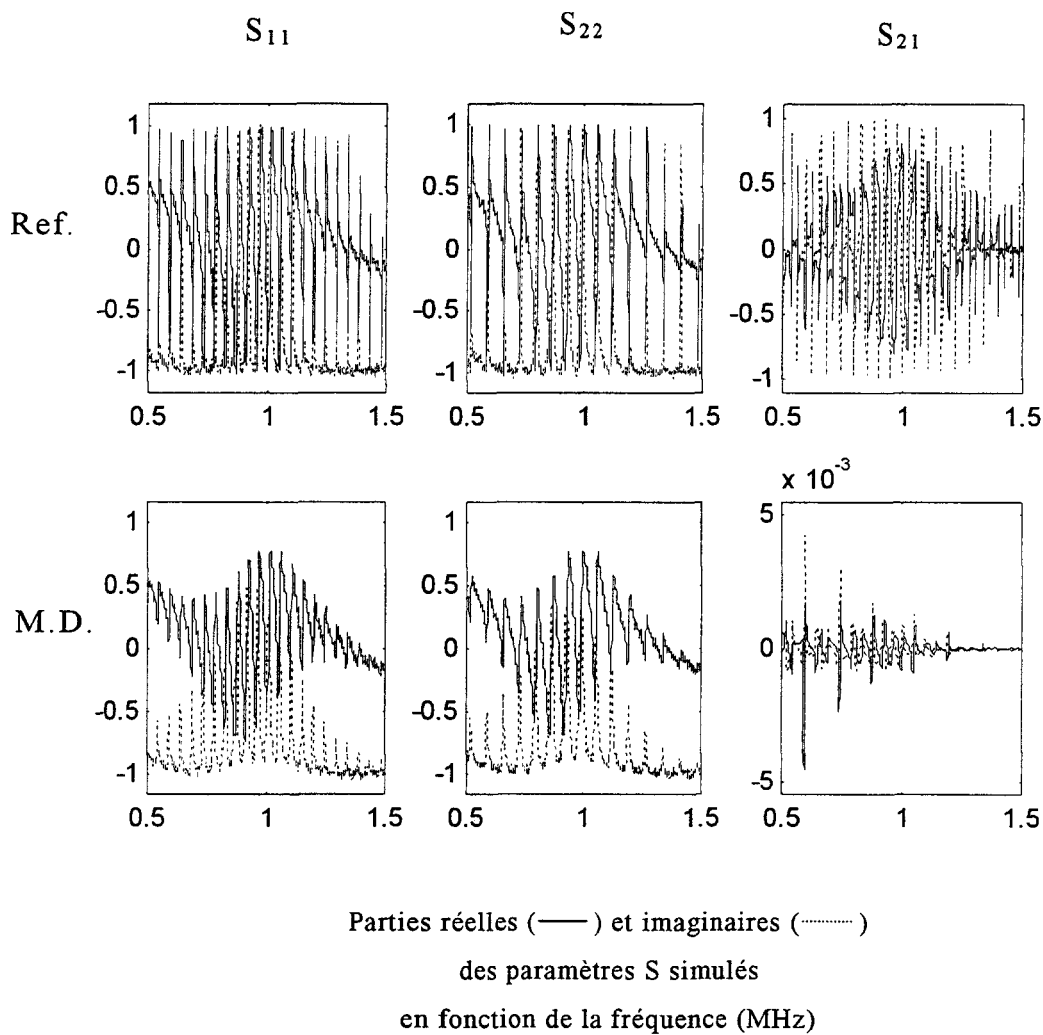
3.05 SIMULATION

Nous reprenons les conditions de simulation présentées dans le chapitre précédent pour lesquelles nous choisissons une loi de comportement dispersif pour le milieu 2 (M.D.). La célérité et le coefficient d'atténuation sont calculés par deux polynômes dépendant de la fréquence. Les milieux de couplages (1 et 3) sont constitués par de l'eau. Nous simulons par la même méthode les mesures des paramètres S de référence (Ref) en choisissant des temps de vols identiques pour les premières impulsions des paramètres de mêmes types. Nous superposons à tous les paramètres S des bruits blancs dans des rapports signal à bruit de 30dB, comparables aux situations que nous rencontrerons dans la partie expérimentale. Nous illustrons les étapes du traitement du signal.

3.05-1 PARAMETRES S

Les paramètres de réflexion calculés laissent apparaître des variations lentes avec la fréquence des composantes électriques S_{ii}^{∞} . A ces variations lentes se superposent les oscillations rapides représentatives des composantes acoustiques.

Figure 3-7 : simulation des paramètres S

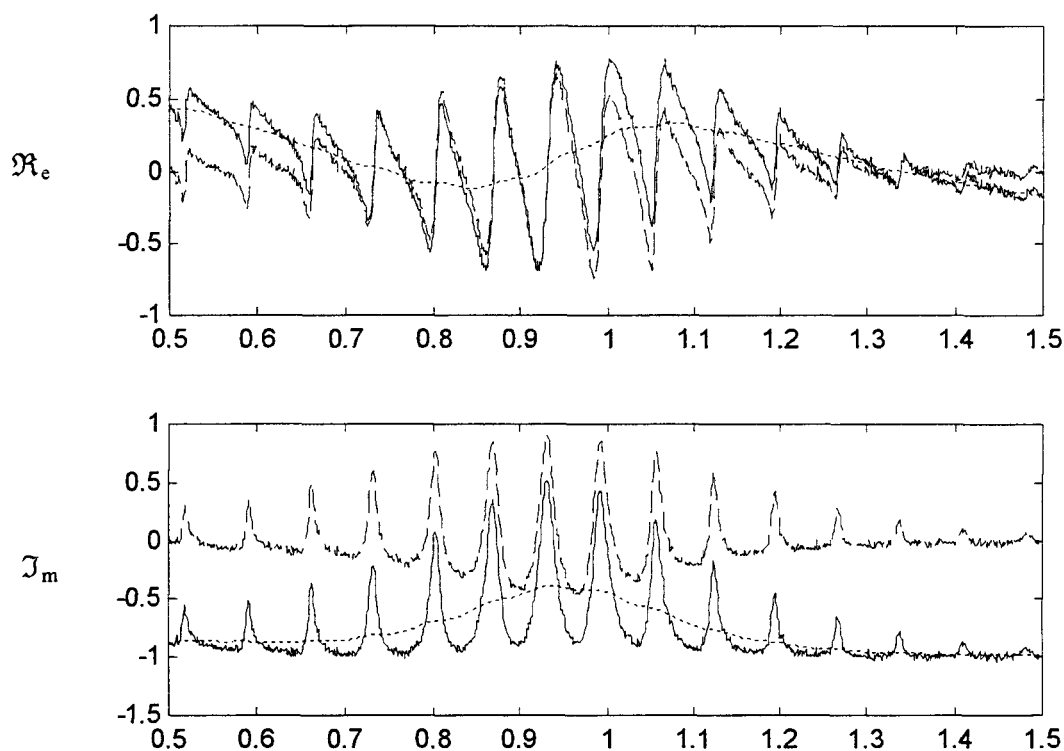


3.05-2 COMPOSANTES ELECTRIQUES ET ACOUSTIQUES DES PARAMETRES S DE REFLEXION

Nous illustrons la décomposition en composante électrique et acoustique sur le paramètre S_{11} .

Elle est réalisée à l'aide d'un filtre à moyenne mobile. Son ordre est calculé à partir de la visualisation du paramètre dans le domaine temporel.

Figure 3-8 : *décomposition en composantes électrique et acoustique*



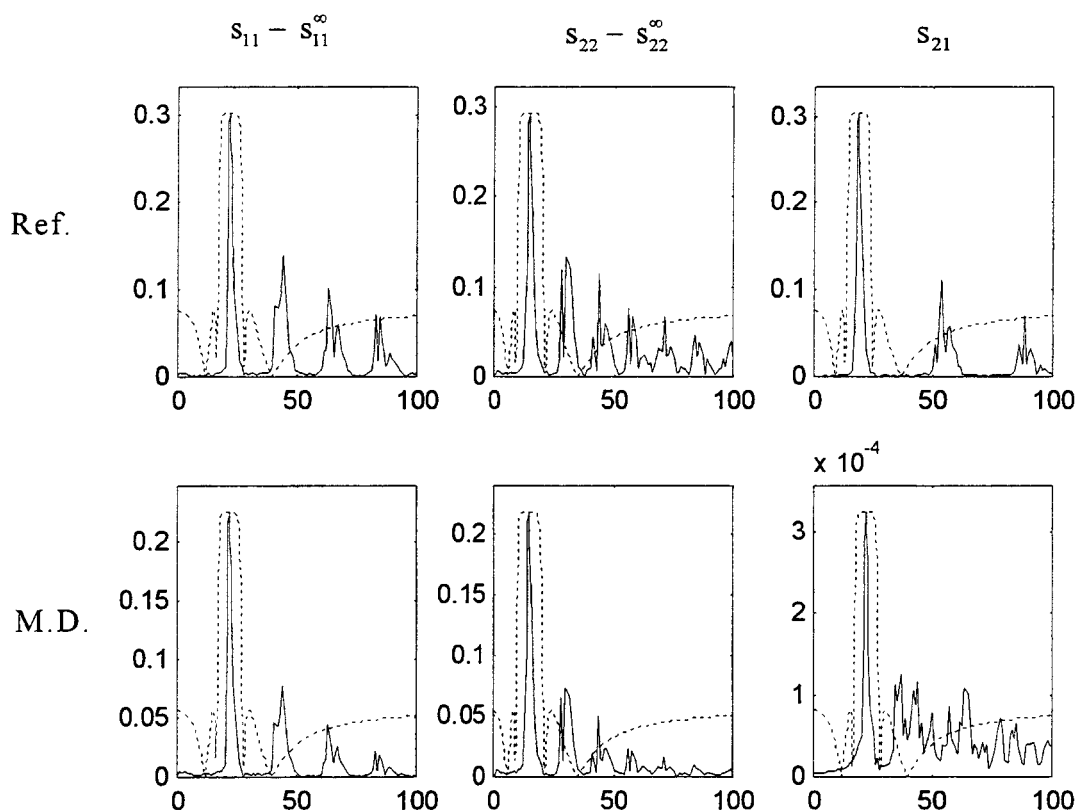
Parties réelles et imaginaires
du paramètre S_{11} (—)
de sa composante électrique (.....)
de sa composante acoustique (---)
en fonction de la fréquence (MHz)

La composante acoustique est obtenue en retranchant la composante électrique au signal initial.

3.05-3 REPRESENTATION TEMPORELLE

La figure 3-7 suivante représente les transformées de Fourier inverses des composantes acoustiques des paramètres de réflexion, ainsi que celles des paramètres de transmission.

Figure 3-9 : représentations temporelles des composantes acoustiques



Modules des transformées de Fourier inverse des paramètres S (—)
 Produit du module de la réponse impulsionnelle du filtre $F_{ac.ut.}$
 par le maximum du module de l'impulsion utile de chaque paramètre (-----)
 en fonction du temps (μs)

Les impulsions associées à des réflexions sur les transducteurs présentent des déformations. Elles sont dues aux effets de la transduction.

Nous relevons les positions t_{200} , t_{002} et t_{111} des impulsions utiles de tous les paramètres.

Les mesures de références sont faites en présence d'un milieu unique, les instants d'apparition des autres impulsions sont respectivement les multiples de t_{200}^{ref} , t_{002}^{ref} et t_{111}^{ref} .

La représentation temporelle du paramètre S_{21} calculé en présence du milieu dispersif présente un grand nombre d'impulsions. Nous évaluons leurs positions et vérifions la cohérence avec les instants t_{npq} , calculés par :

$$t_{npq} = \frac{n}{2} t_{200} + p \left(t_{111} - \frac{t_{200} + t_{002}}{2} \right) + \frac{q}{2} t_{002}$$

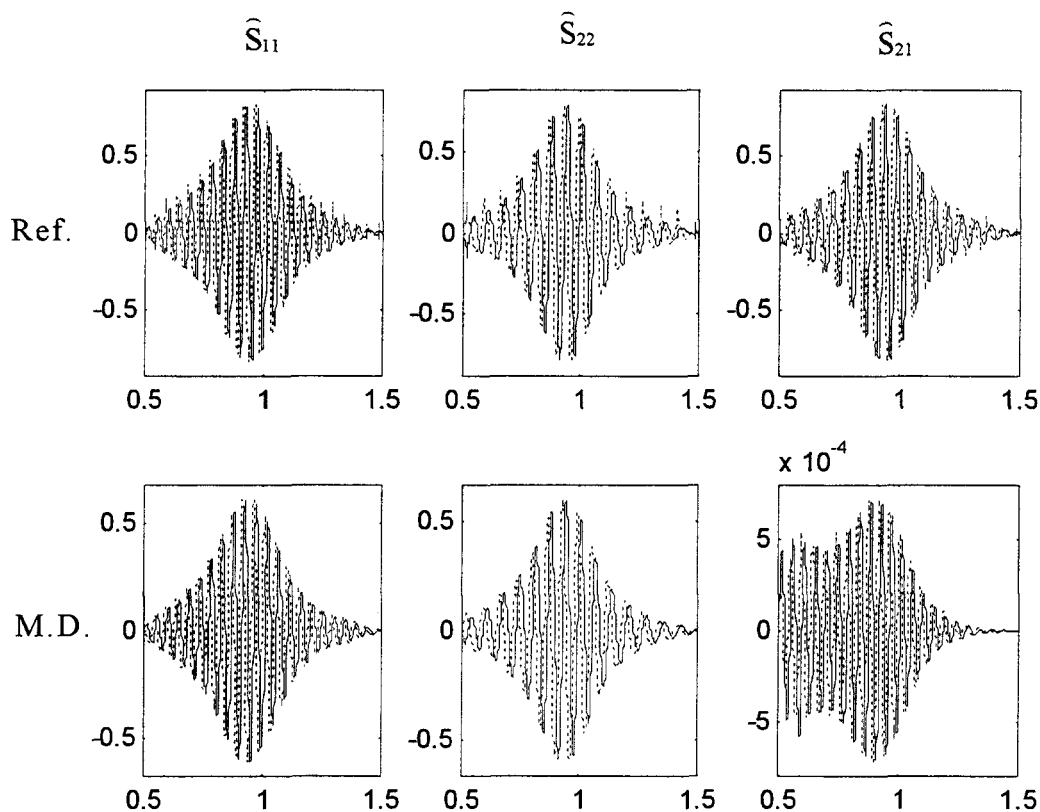
On déduit aussi des instants t_{200} , t_{002} et t_{111} , une évaluation du temps de vol dans le milieu dispersif, $\Delta t = t_{111} - \frac{t_{200} + t_{002}}{2}$. La connaissance de ce temps de vol nous est d'une grande utilité.

- Elle nous fournit notamment une évaluation de la célérité de l'onde dans le milieu étudié ($v_2 = e_2/\Delta t$). Cela constitue l'information à priori, nécessaire à l'évaluation de la célérité dans le domaine fréquentiel, dans la mesure où elle permet de lever l'indétermination de $2n\pi$ sur la phase ϕ_{21} .
- Elle permet d'évaluer la largeur $2\Delta t$ des fenêtres centrées sur les impulsions utiles permettant d'obtenir les réponses impulsionnelles des filtres $F_{ac.ut.}$.

3.05-4 PARAMETRES S FILTRES

La figure 3-8 suivante présente le résultat des filtrages des paramètres S dans le domaine fréquentiel. Elle montre clairement l'influence des fonctions de transductions.

Figure 3-10 : paramètres S filtrés



Partie réelle (—) et imaginaire (.....)
des paramètres S filtrés
en fonction de la fréquence (MHz)

3.05-5 ÉGALISATION

Nous cherchons à évaluer les fonctions de transductions. La division des paramètres S calculés sur le milieu dispersif par ces fonctions de transduction permet d'éliminer les effets de la transduction sur les mesures. Cette étape est appelée l'égalisation des signaux. Superposées aux effets des fonctions de transduction, des oscillations résiduelles au filtrage, et dans le cas présent, des pics résultants d'instabilités numériques apparaissent dans les modules et phases des paramètres S calculés. Ces imperfections doivent être filtrées afin d'évaluer les fonctions égalisatrices R_{11} , R_{22}

et R_{21} des paramètres S. Ces fonctions sont obtenues par démodulation des paramètres $\widehat{S}_{ij}^{\text{ref}}$ correspondants et par filtrage polynomial.

Nous illustrons cette étape du traitement pour le paramètre S_{11} :

Disposant du temps de vol t_{200}^{ref} , nous démodulons $\widehat{S}_{11}^{\text{ref}}$ et corrigeons l'absorption dans l'eau : $K_{11}(f) t_{10}(f) = -\widehat{S}_{11}^{\text{ref}} e^{\alpha_0 v_0 t_{200}^{\text{ref}}} e^{i2\pi f t_{200}^{\text{ref}}}$

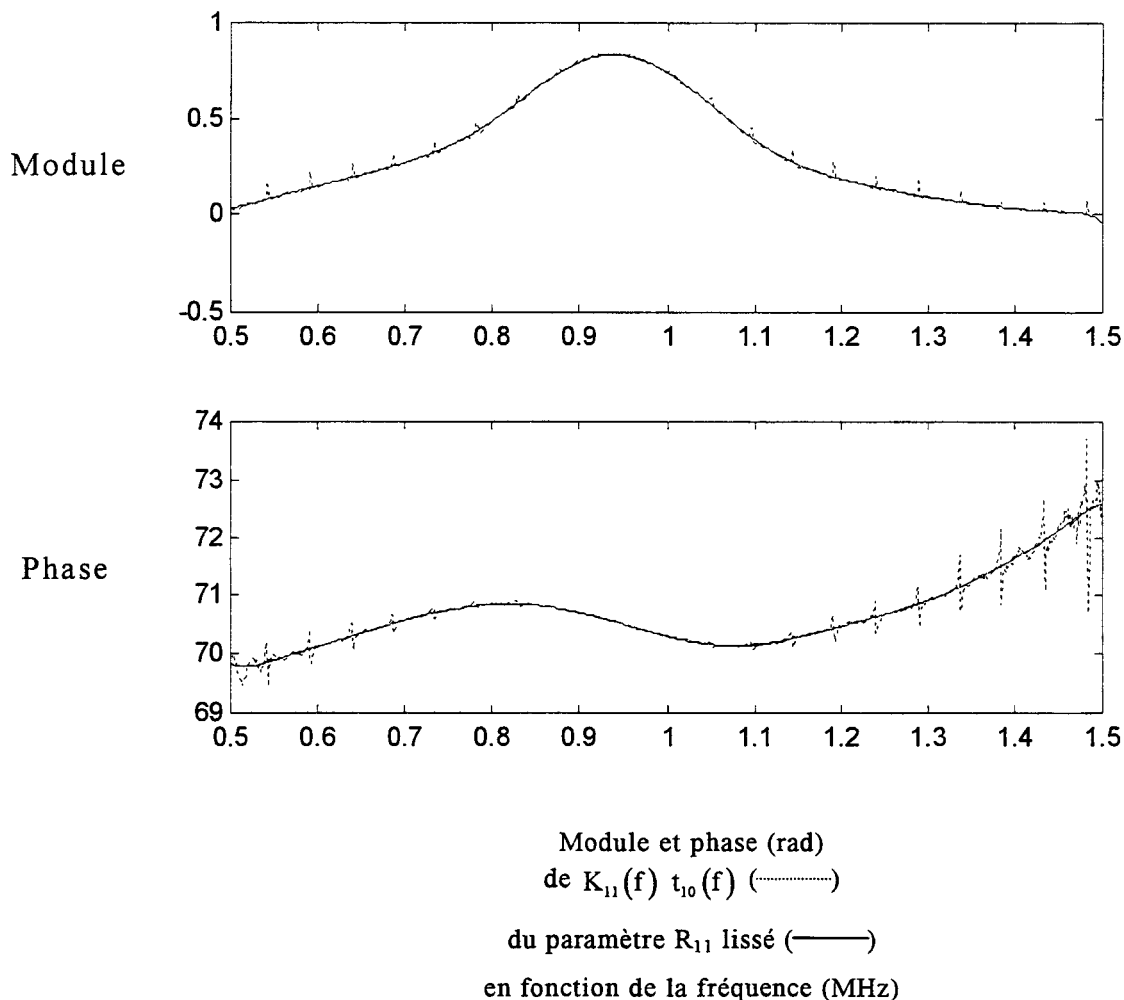
Nous recherchons par la méthode des moindres carrés les polynômes $P_m(f)$ et $P_p(f)$ d'ordre suffisamment important, capables de lisser le module et la phase de $K_{11}(f) t_{10}(f)$.

Nous calculons la fonction égalisatrice R_{11} du paramètre S_{11} par :

$$R_{11}(f) = P_m(f) e^{iP_p(f)}$$

La figure 3-9 suivante illustre ce traitement.

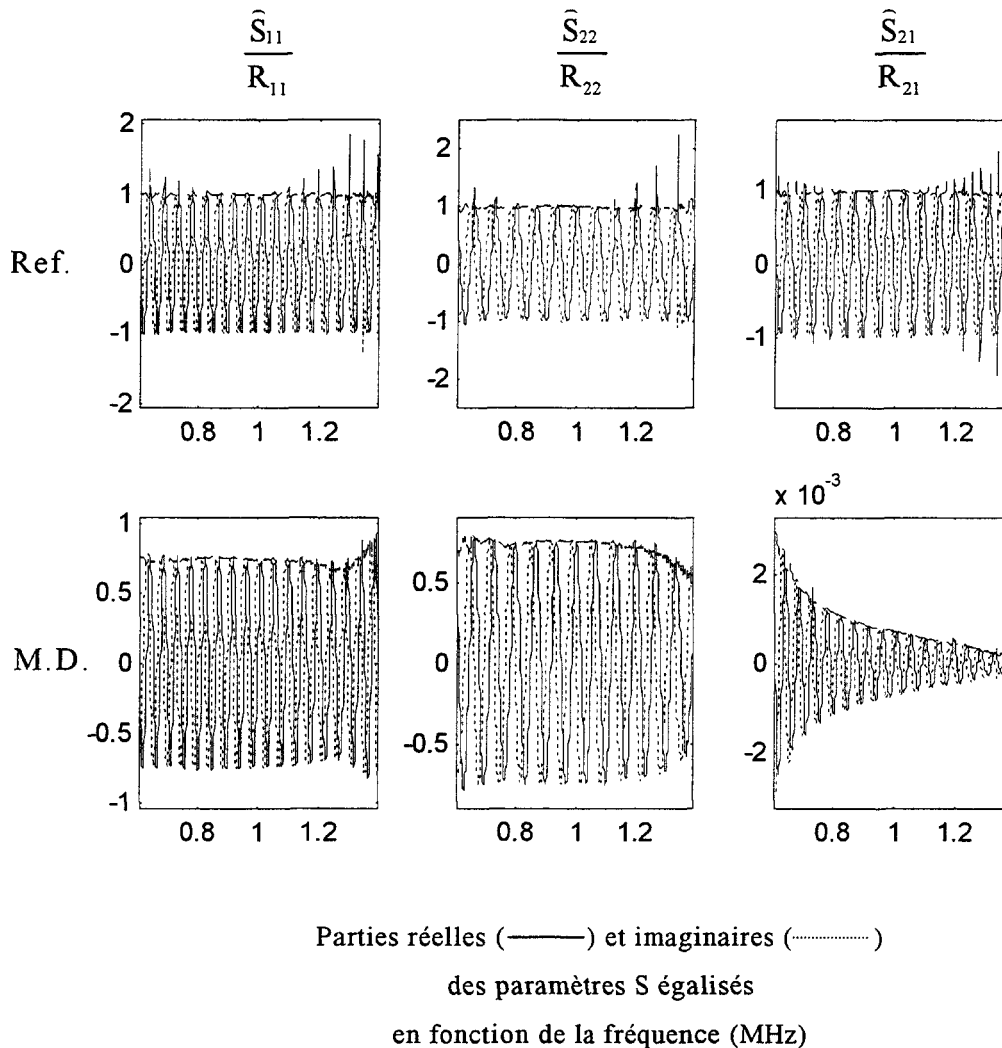
Figure 3-11 : *lissage polynomial des fonctions de transductions*



La même méthode est appliquée aux mesures des paramètres S_{22} et S_{21} , se qui nous permet d'obtenir les fonctions égalisatrices $R_{22}(f)$ et $R_{21}(f)$.

Nous égalisons les paramètres S calculés sur le milieu dispersif comme il a été expliqué au paragraphe 3.03.3-c. Nous faisons de même sur les signaux de référence pour vérifier la qualité du traitement. Les signaux de références égalisés doivent posséder un module unité.

Figure 3-12 : paramètres S égalisés

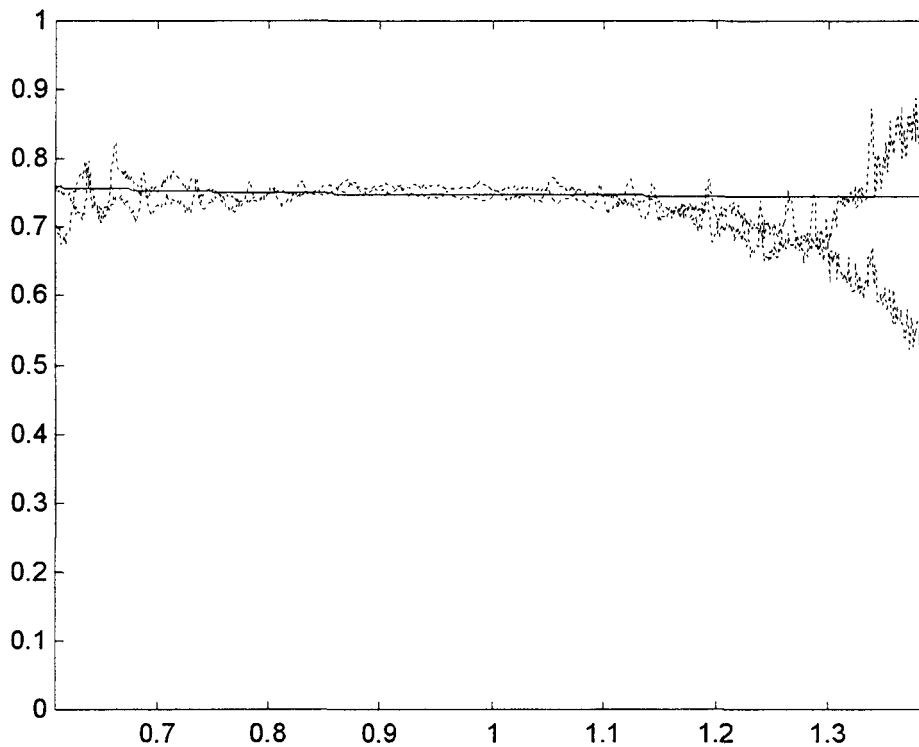


Les modules des paramètres de référence restent proches de l'unité exceptées quelques fortes oscillations en début et en fin de bande. Ces oscillations résultent en grande partie des effets des divisions des paramètres S par les fonctions de transductions. Comme elles sont proches de zéro dans ces zones, l'influence du bruit est plus importante. Seule la bande centrale est représentative.

3.05-6 COEFFICIENT DE REFLEXION

Nous obtenons le coefficient de réflexion à partir des modules des paramètres de réflexions égalisés. Nous utilisons le traitement donné au paragraphe 3.03.3-d sur les deux paramètres S_{11} et S_{22} et appelons respectivement $r_{11}(f) = \left| \frac{\hat{S}_{11}}{R_{11}} \right| e^{\alpha_0 \nu_0 t_{200}}$ et $r_{22}(f) = \left| \frac{\hat{S}_{22}}{R_{22}} \right| e^{\alpha_0 \nu_0 t_{002}}$. La figure 3-11 suivante représente ces deux coefficients de réflexion :

Figure 3-13 : *coefficients de réflexion*



Coefficients de réflexion en fonction de la fréquence (MHz)
calculés (.....), exact (——)

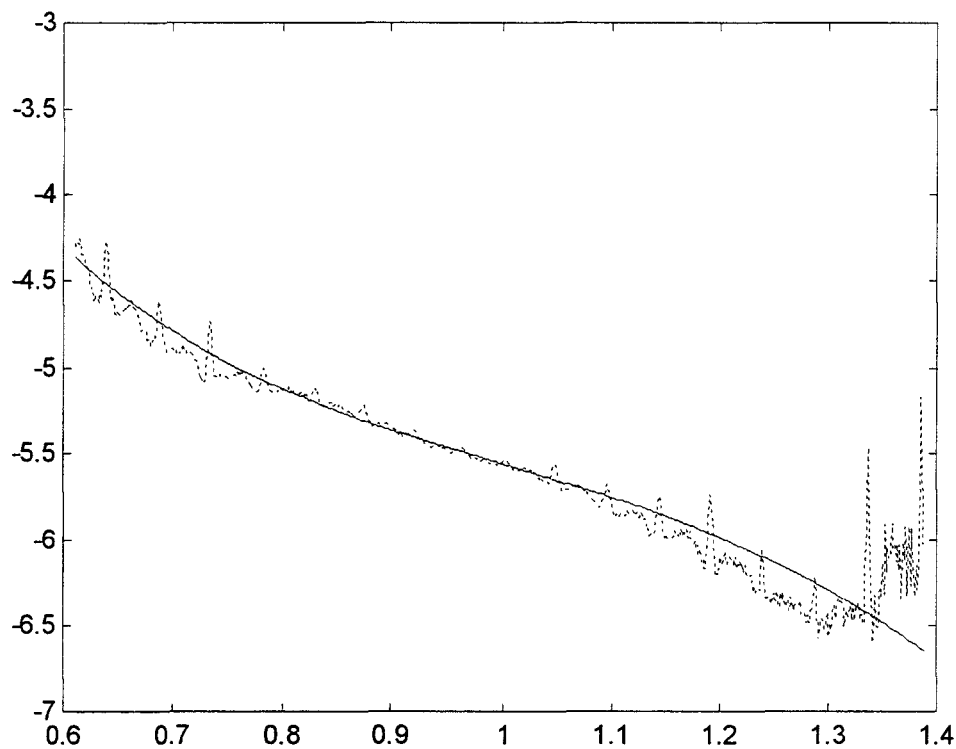
La bande centrale accuse assez peu de fluctuations. Elles sont plus importantes en début et en fin de bande. Ceci est dû, d'une part aux effets de bord du filtrage, d'autre part au moins bon rapport signal sur bruit existant à ces fréquences. L'accord entre les valeurs des coefficients de réflexion calculés et celles du coefficient exact est correct dans la bande centrale.

3.05-7 COEFFICIENT D'ATTENUATION

Nous l'obtenons à partir du module du paramètre S_{21} et des coefficients de réflexions obtenus précédemment :

$$\alpha(f) = \frac{\alpha_0 v_0 \left(\frac{t_{200} + t_{002}}{2} \right) + \ln \left(\frac{\hat{S}_{21}}{R_{21}} \frac{1}{(1-r_1)(1+r_2)} \right)}{-e_2}$$

Figure 3-14 : Atténuation



Atténuation ($-\alpha$: dBmm^{-1}) en fonction de la fréquence (MHz)
calculée (.....), exacte (—)

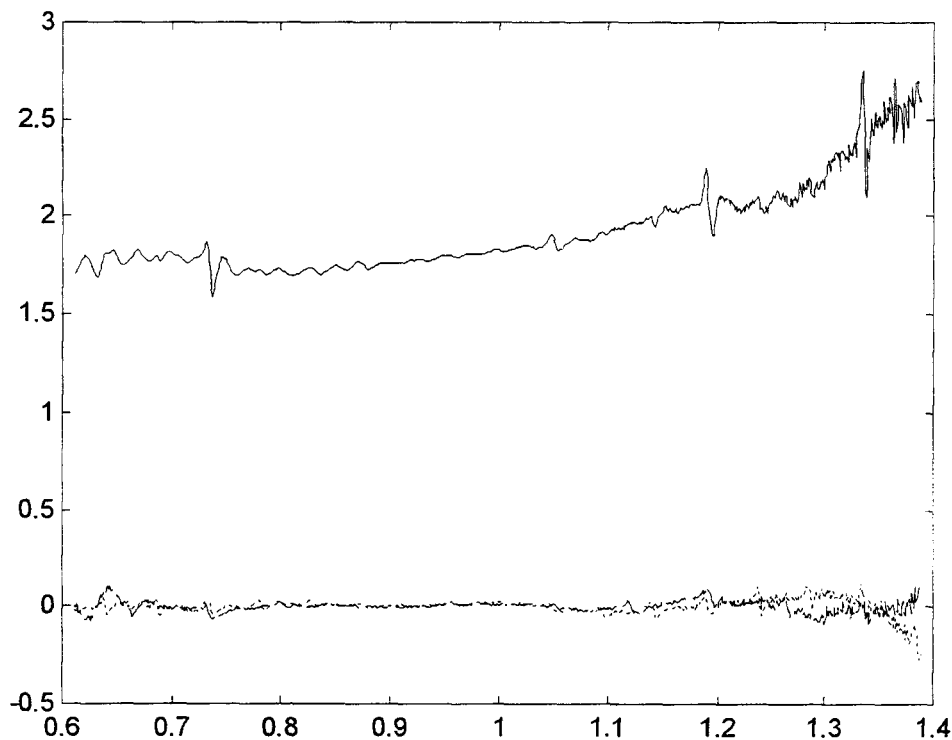
La méthode permet de suivre correctement l'évolution de l'atténuation avec la fréquence. Pour les raisons évoquées précédemment, le calcul est meilleur dans la bande centrale qu'à ses extrémités.

3.05-8 CELERITE

Le calcul de la célérité nécessite la connaissance des phases des trois paramètres égalisés. Comme expliqué au paragraphe 3.03.3-d, nous devons dérouler les phases sur toute la gamme de fréquences, puis retirer l'ordonnée à l'origine pour les paramètres de réflexions tandis que nous conservons le modulo 2π de l'ordonnée à l'origine pour le paramètre de transmission.

Nous vérifions la linéarité des phases en calculant l'écart existant entre les phases et leurs régressions linéaires.

Figure 3-15 : *écart des phases par rapport à leurs régressions linéaires*



Différence (rad) entre les phases et leurs régressions linéaires
 du paramètre S_{21} normalisé (—)
 des paramètres S_{11} et S_{22} égalisés (.....)
 en fonction de la fréquence (MHz)

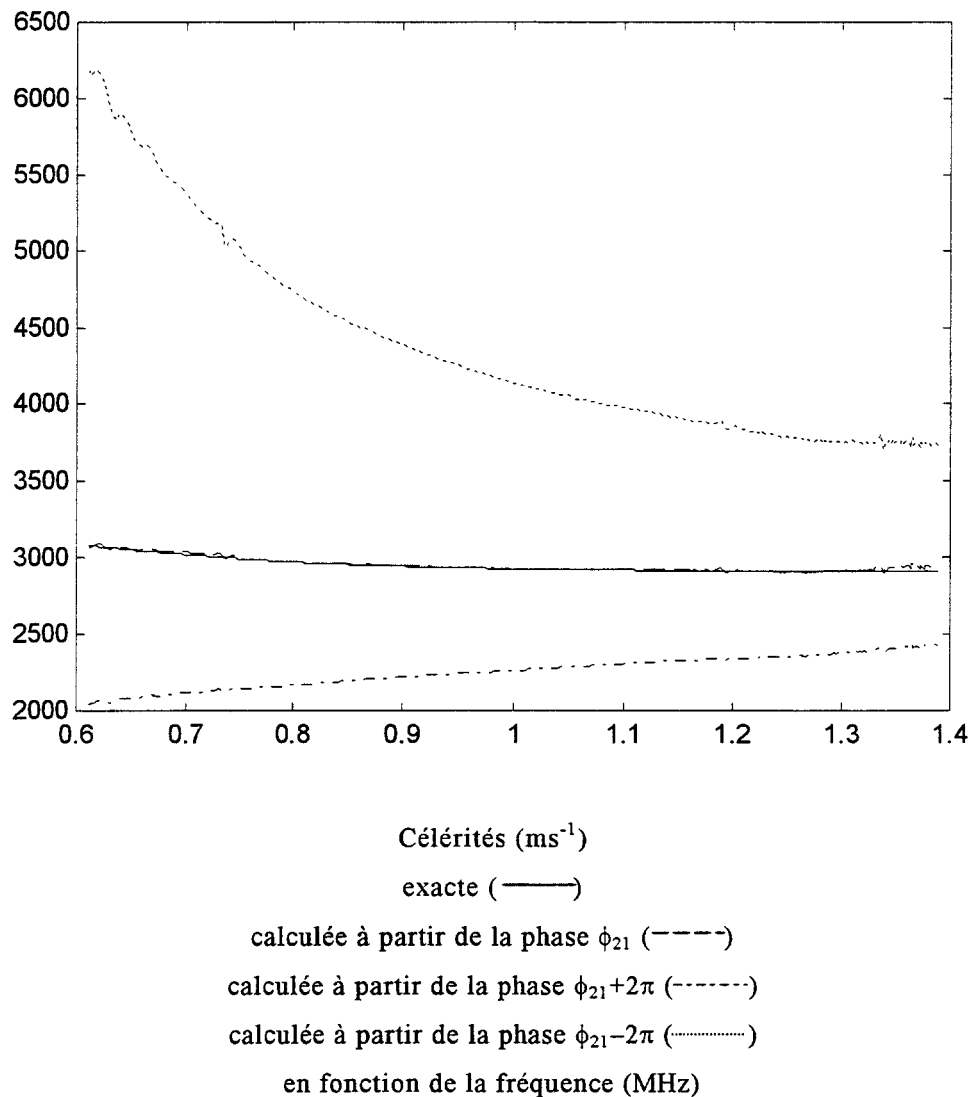
La différence entre les phases et leurs régressions linéaires pour les paramètres de réflexion est représentative de l'erreur sur le traitement. Elle est inférieure à 10° .

La non linéarité de la phase du paramètre S_{21} égalisé apparaît clairement, elle augmente d'environ $\pi/3$ sur la bande où le calcul est réalisé. Des oscillations sont très nettes en fin de bande.

Nous calculons la célérité par l'expression $v(f) = \frac{-2\pi f e_2}{\phi_{21} - \frac{\phi_{11} + \phi_{22}}{2}}$. L'indétermination

sur la phase ϕ_{21} n'ayant pas été forcément bien levée, nous recalculons cette expression dans laquelle nous ajoutons ou retranchons 2π à la phase ϕ_{21} comme expliqué au paragraphe 3.03.3-d.

Figure 3-16 : célérités sans à priori



Les valeurs de la célérité pour lesquelles le facteur 2π a été ajouté ou retranché à la phase du paramètre S_{12} sont nettement différentes de la célérité exacte qui coïncide avec la célérité calculée sans cet artifice. Il n'est pas nécessaire de posséder une connaissance à priori très fine sur la célérité pour lever l'indétermination sur la phase ϕ_{21} .

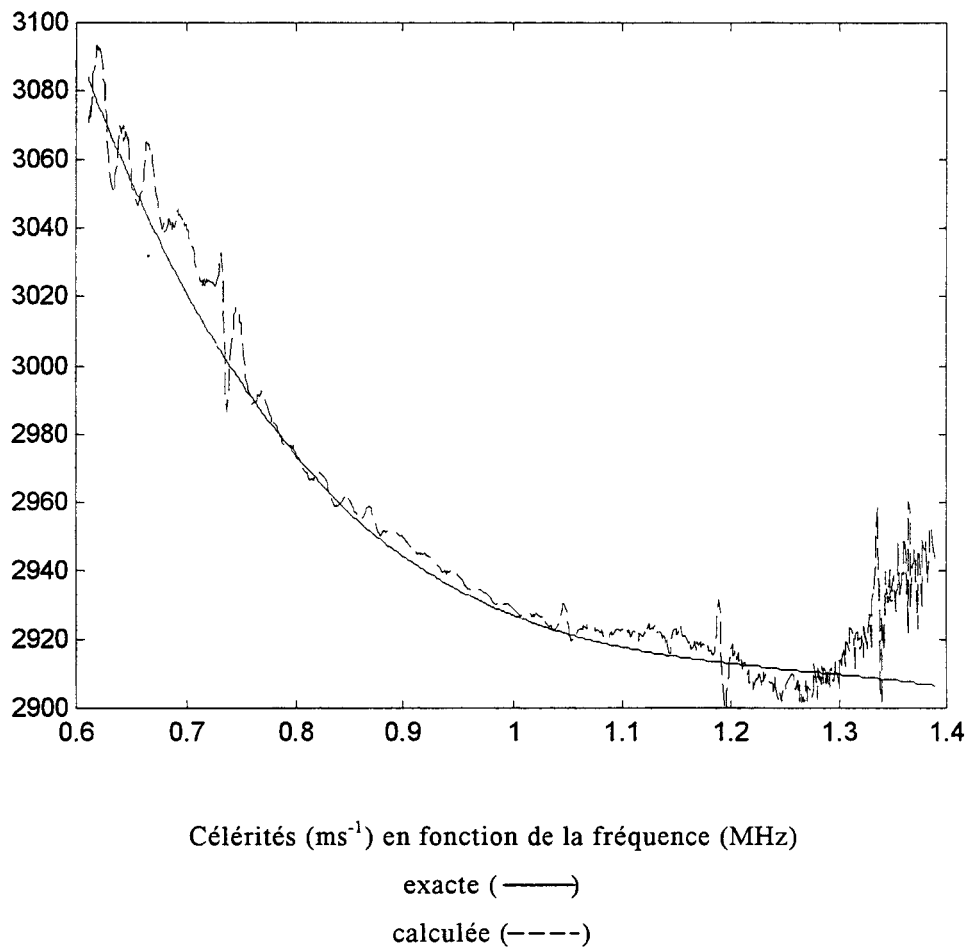
Notons que la valeur de la célérité calculée par l'analyse temporelle

$$\left(v_2 = \frac{e_2}{t_{111} - \frac{t_{200} + t_{002}}{2}} \right) \text{ est proche de la valeur moyenne de la célérité exacte.}$$

L'analyse temporelle fournira donc par la suite l'information à priori sur la célérité, nécessaire à une bonne levée de l'indétermination sur la phase ϕ_{21} .

Nous présentons un agrandissement de la courbe précédente autour de la valeur exacte de la célérité sur la figure 3-15 suivante :

Figure 3-17 : *agrandissement de la célérité calculée autour de la valeur exacte*



La méthode de traitement permet de suivre correctement l'évolution de la célérité avec la fréquence. Un léger biais apparaît cependant dans la bande centrale où la valeur calculée est légèrement supérieure à la valeur exacte. D'autres essais font apparaître une tendance opposée.

3.05-9 TEST DE ROBUSTESSE

Nous testons la robustesse de l'algorithme en terme d'erreurs absolues moyennes sur les grandeurs évaluées en fonction du rapport signal à bruit. Le terme signal désigne celui qui est composé de la totalité des termes des paramètres S.

Afin de s'assurer d'une bonne représentativité, nous évaluons les coefficients de réflexion et d'atténuation, ainsi que la célérité par la méthode de traitement décrite précédemment. Nous calculons la valeur absolue de l'erreur sur ces grandeurs. Nous en moyennons ensuite le résultat sur 50 tirages de bruits, en maintenant le même rapport signal sur bruit, puis nous répétons ces calculs pour différents rapports signal à bruit.

Nous disposons alors des erreurs absolues moyennes sur les évaluations en fonction du rapport signal sur bruit.

3.05-9-a ERREUR SUR LES COEFFICIENTS DE REFLEXION ET D'ATTENUATION

Les figures 3-16 et 3-17 suivantes présentent les résultats du test de robustesse au bruit de mesure sur les calculs du coefficient de réflexion et du coefficient d'atténuation.

L'erreur absolue moyenne sur le coefficient de réflexion est inférieure à 10% pour un rapport signal sur bruit supérieur à 15dB. Elle est inférieure à 10% sur le calcul du coefficient d'atténuation pour un rapport signal sur bruit supérieur à 10dB.

Figure 3-18 : *erreur absolue moyenne sur le coefficient de réflexion*

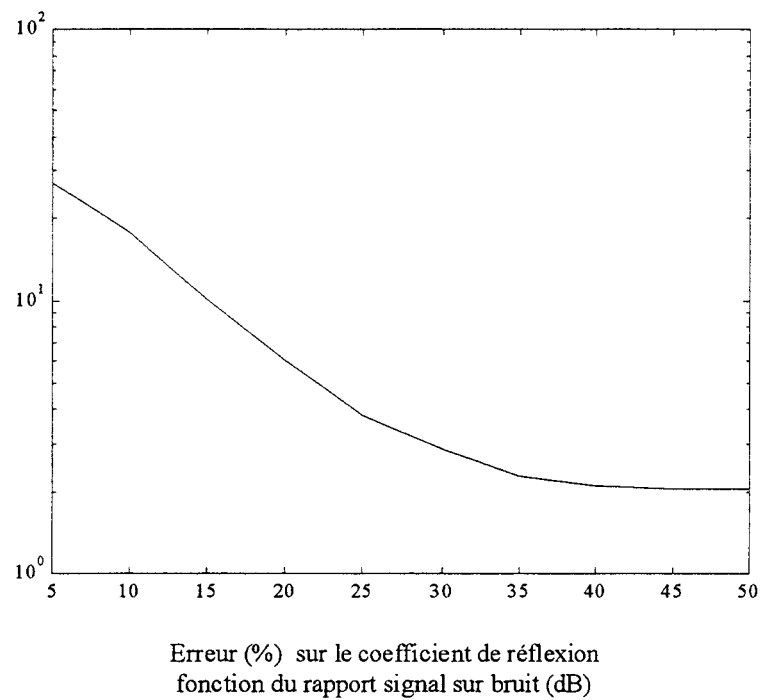
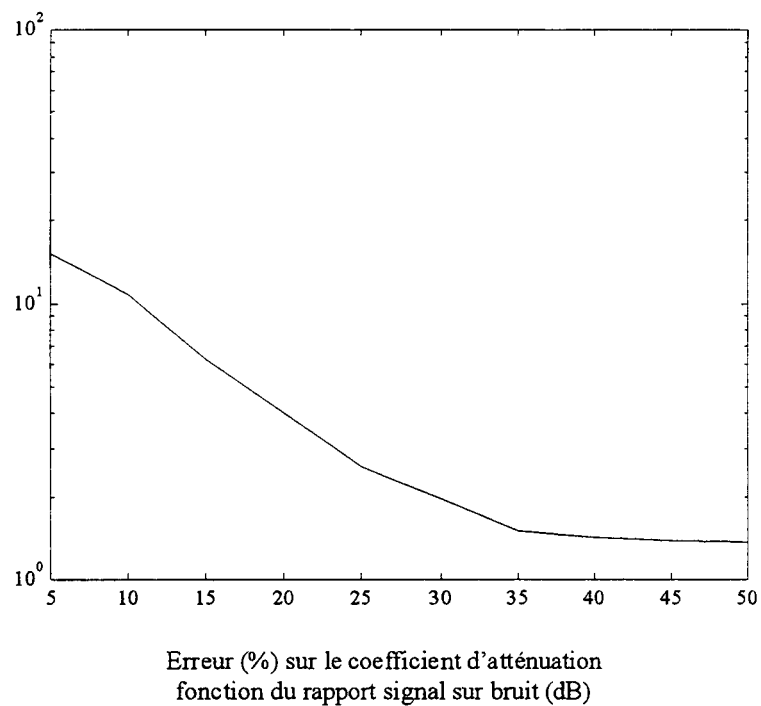


Figure 3-19 : *erreur absolue moyenne sur le coefficient d'atténuation*

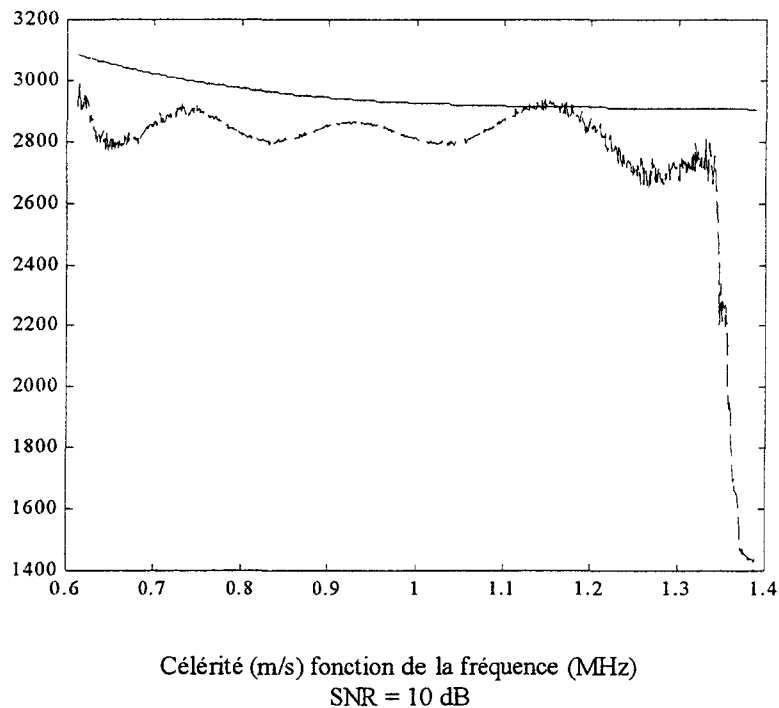


3.05-9-b ERREUR SUR LA CELERITE

Décrochage de phase :

Nous présentons sur la figure suivante la cause d'erreur typique apparaissant dans le calcul de la célérité pour un rapport signal sur bruit inférieur à 10dB.

Figure 3-20 : *décrochage de phase*

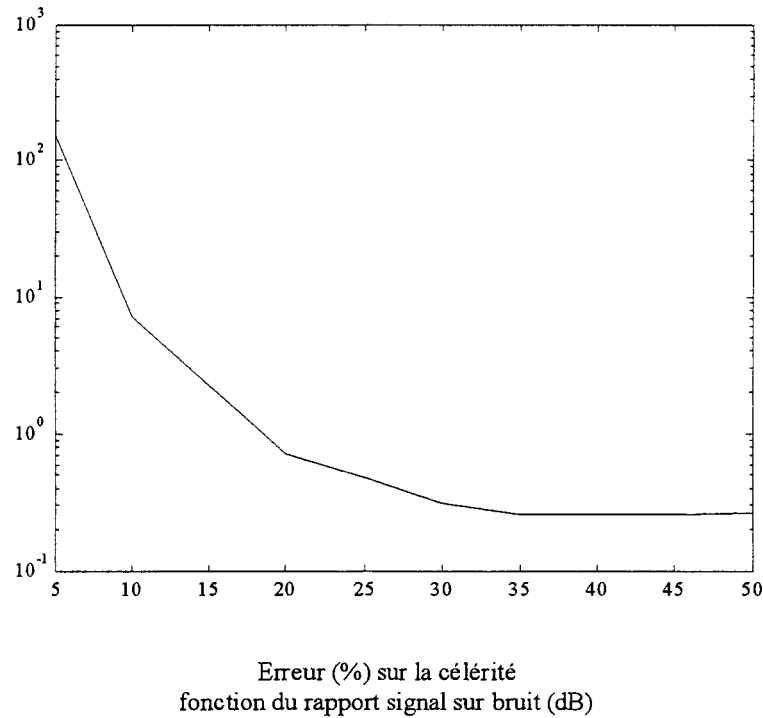


La célérité calculée reste assez proche de la valeur exacte (10% d'erreur). Il apparaît un décrochage vers 1,3MHz où la valeur de la célérité calculée chute très rapidement. Il est arrivé de voir sa valeur augmenter brusquement sur d'autres tirages de bruit. La fréquence pour laquelle ce décrochage a lieu reste par contre quasiment identique. Nous avons remarqué des oscillations des paramètres S égalisés à partir de cette fréquence. Elles résultaient d'une mauvaise égalisation des signaux, les transducteurs n'émettant pas suffisamment d'énergie à partir de cette fréquence. Nous ne devons pas nous étonner d'obtenir une mauvaise évaluation de la célérité dans ces conditions. Notons que l'évaluation reste bonne pour une fréquence inférieure à 1,3MHz.

Ce décrochage est facilement reconnaissable et cette zone pourrait être éliminée des courbes. Néanmoins nous le conserverons, préférant surestimer l'erreur moyenne.

Nous retrouverons ce phénomène dans le chapitre suivant consacré à l'étude expérimentale d'un milieu poreux.

Figure 3-21 : *erreur absolue moyenne sur la célérité*



L'erreur moyenne sur le calcul de la célérité est inférieure à 1% pour un rapport signal sur bruit supérieur à 15dB. La valeur très importante qu'elle atteint en dessous des 15dB est en grande partie imputable au décrochage de phase.

3.06 CONCLUSION

Des expressions littérales des paramètres S du système de mesure, nous avons présenté des méthodes de traitement du signal qui ont permis de caractériser un milieu dans le domaine fréquentiel, bien adapté aux milieux dispersifs, ou dans le domaine temporel, plus adapté aux milieux non dispersifs. Il a été nécessaire dans les deux cas de s'affranchir des effets de la transduction électro-acoustique.

Nous avons illustré l'intérêt de la méthode harmonique sur la caractérisation d'un milieu non dispersif. Elle se révèle être efficace sur une dynamique importante. La sensibilité et la précision que nous avons pu obtenir lors de la caractérisation d'un fluide sont remarquables.

Nous avons effectué une simulation de la méthode de traitement du signal sur un milieu dispersif. Les résultats de simulations sont prometteurs. Nous nous sommes en effets placés dans des conditions nettement plus défavorables de rapport signal à bruit et de calcul d'erreur que dans les conditions expérimentales.

La méthode de traitement du signal sur les mesures effectuées en régime harmoniques permet donc d'obtenir des informations similaires à celles obtenues par les méthodes impulsionnelles tout en assurant un bon rapport signal à bruit.

Chapitre 4. RESULTATS EXPERIMENTAUX

4.01 INTRODUCTION

Nous avons obtenu les expressions littérales des paramètres S du système de mesure. Quelques pistes de traitement du signal sur ces expressions ont été évoquées. Nous les mettrons en pratique dans ce chapitre où nous tenterons d'évaluer les possibilités de caractérisation de céramiques d'hydroxy apatite poreuses.

Nous présenterons rapidement le procédé de fabrication des céramiques. Le protocole expérimental de la mesure des paramètres S paraîtra sûrement fastidieux. Il n'a été obtenu qu'après de nombreux essais infructueux en terme de reproductibilité et de précision des mesures. Les difficultés que nous avons rencontrées sur le plan expérimental sont en partie liées au mélange des différents signaux résultant d'une excitation harmonique du système de mesure. Ces phénomènes rendent de plus l'expérimentation extrêmement sensible à l'environnement, particulièrement aux vibration des supports.

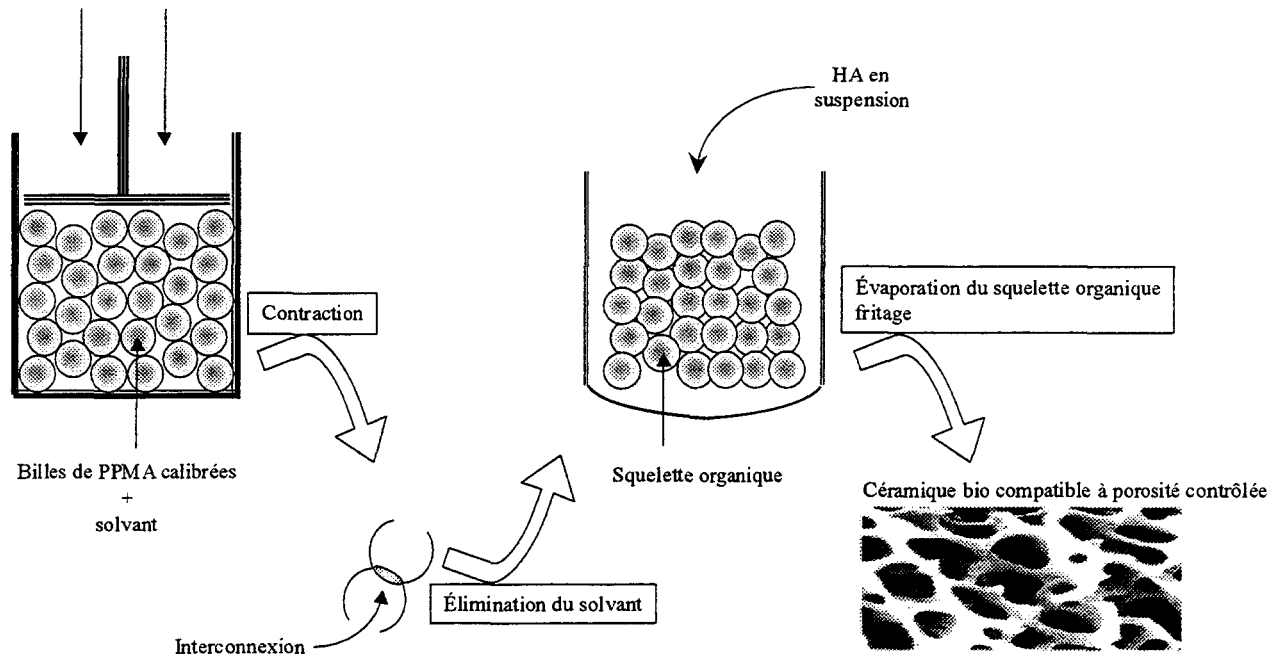
Nous détaillerons les étapes du traitement du signal des paramètres S mesurés sur une bande de fréquence afin de comparer leurs allures à celles des signaux que nous avons obtenus par simulation. Nous présenterons la concaténation des résultats expérimentaux extraits sur plusieurs bandes de fréquences. Les limites d'une technique de traitement du signal sur la basée sur une propagation dans un milieu homogène apparaîtra clairement.

La grande dynamique que permet le système de mesure met en évidence une allure singulière du paramètre S_{21} en haute fréquence. Sa représentation temps-fréquence dans la gamme haute fréquence mettra en évidence un comportement spécifique aux milieux hétérogènes.

4.02 PROCEDE DE FABRICATION DES CERAMIQUES POREUSES

Les céramiques d'hydroxy apatite (HA) poreuses sont fabriquées en vue du comblement d'un site osseux déficient. Elles doivent permettre la migration des cellules osseuses et par conséquent être à porosité ouverte. Leur protocole de fabrication est schématisé sur la figure 4-1 suivante.

Figure 4-1 : *procédé de fabrication des céramiques poreuses*



Un squelette organique est fabriqué en agglomérant des billes calibrées. Elles sont ensuite mises en présence d'un solvant qui a pour effet de les souder. Le contrôle de la rétractation de l'agglomérat permet d'ajuster le diamètre moyen d'interconnexion ou la porosité de la céramique. Le squelette organique est placé dans un moule résistant aux fortes températures. Une suspension d'hydroxy apatite est ensuite injectée dans ce squelette organique. L'hydroxy apatite se densifie par absorption du solvant dans le moule. Puis par élévation de température il est possible d'évaporer le squelette organique. La dernière étape consiste en un frittage de la céramique.

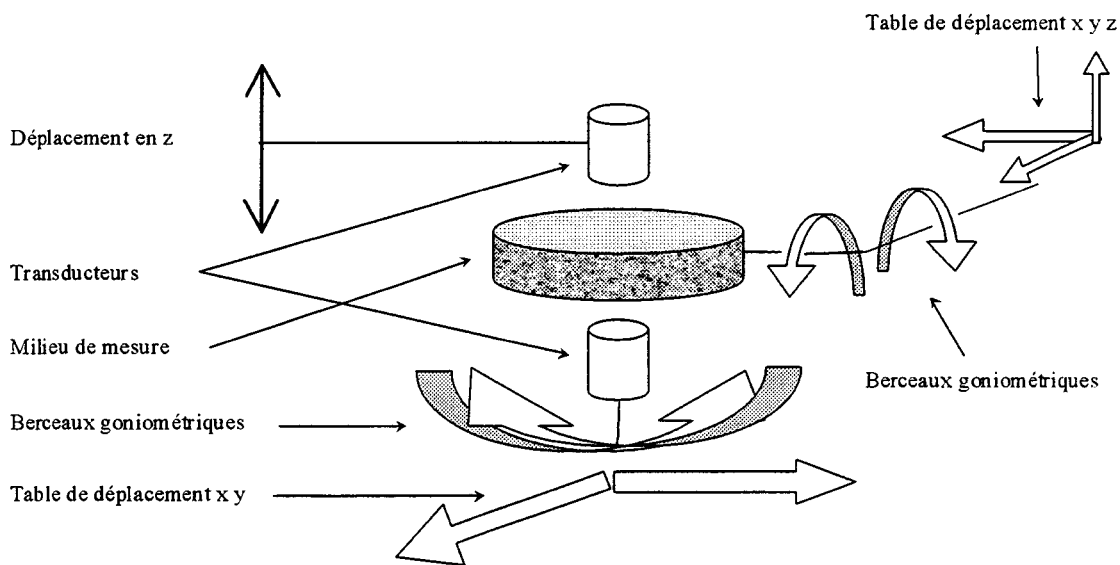
Il est difficile d'obtenir des échantillons d'une épaisseur supérieure au centimètre. L'évaporation du squelette organique se trouvant au cœur du matériau déchire les couches superficielles. Un protocole d'évaporation du squelette organique doit être mis au point pour les épaisseurs importantes.

La célérité des ondes ultrasonores est de l'ordre de 3000ms^{-1} dans ce type de milieu. La séparation des termes utiles des paramètres S nécessite, dans le cadre du critère de Rayleigh, une bande de mesure supérieure à 150kHz pour une épaisseur de 1cm . Cette contrainte sera mise en évidence dans les résultats expérimentaux.

4.03 PROTOCOLE EXPERIMENTAL

Le dispositif expérimental est schématisé sur la figure 4-2 suivante :

Figure 4-2 : schéma du dispositif expérimental



Les transducteurs de fréquence centrale voisine de 500kHz fonctionnent en champ proche. Nous avons relevé des fluctuations d'amplitude avec la distance de l'ordre de 5% sur les signaux transmis.

Afin de s'affranchir des inhomogénéités des faisceaux acoustiques, nous mesurons les paramètres S en présence du milieu poreux et les paramètres S de références dans des conditions identiques. Nous utilisons les temps de vol, plus accessibles que les distances. Nous commençons donc par effectuer les mesures des paramètres S en présence du milieu poreux. Nous évaluons les temps de vol t_{200} , t_{002} et t_{111} . Le milieu poreux est retiré. Nous nous plaçons pour les mesures de référence de façon à obtenir $t_{200}^{\text{ref}} \approx t_{200}$, $t_{002}^{\text{ref}} \approx t_{002}$ et $t_{111}^{\text{ref}} \approx t_{111}$ en ajustant l'épaisseur du milieu de référence.

4.03-1 CALIBRAGE DE L'ANALYSEUR DE RESEAU

La mesure des trois paramètres S_{11} , S_{22} et S_{21} nécessitent le calibrage complet de l'analyseur. Les plans de calibrages sont choisis le plus proche possible des transducteurs. Nous utilisons les plans constitués par les fiches de connexion des transducteurs. La charge électrique ramenée sur le transducteur récepteur est de 50Ω , de même que la résistance interne du générateur.

Ceci nous permet de nous approcher des hypothèses qui nous ont permis d'élaborer les expressions des paramètres S .

Les transformées de Fourier inverse des composantes électriques apparaîtront à l'origine de l'axe des temps.

4.03-2 REGLAGE DU PARALLELISME DES TRANSDUCTEURS

La première étape du protocole consiste à régler le parallélisme des transducteurs. Le banc de mesure est vertical. Ni le milieu poreux, ni son support ne sont insérés. Les transducteurs sont fixés sur le banc en maintenant leurs surfaces émettrices horizontales. Ce réglage sommaire est affiné en plaçant les transducteurs très proches l'un de l'autre. Le réglage xy des transducteurs est effectué à vue. Un récipient cylindrique possédant un trou du diamètre du transducteur à sa base est placé sur le transducteur inférieur qui assure l'étanchéité du système. Nous affinons les réglages précédents par voie acoustique. Les deux transducteurs immergés sont respectivement reliés à un générateur de salves et à un oscilloscope. Nous recherchons le maximum d'amplitude en transmission sur l'oscilloscope.

4.03-3 REGLAGE DE L'INCIDENCE SUR MILIEU POREUX

La seconde étape consiste à obtenir une incidence normale de l'onde acoustique sur le milieu poreux. La cuve est vidangée. Nous fixons le milieu poreux sur son support, puis insérons le support sur le banc de mesure. Un premier réglage sommaire consiste à vérifier l'horizontalité du milieu poreux à l'aide d'un niveau à bulle. La cuve est remplie d'eau. Nous affinons le réglage précédent par voie acoustique en recherchant le maximum d'amplitude de l'impulsion réfléchie sur le milieu poreux.

Ceci n'est pas toujours réalisable. Une onde de haute fréquence est fortement diffusée à la surface du milieu poreux, le signal réfléchi est alors très faible et il devient difficile d'effectuer le réglage. Nous déposons alors un réflecteur parfait, constitué d'un cylindre creux dont les bases ont été fermées par des plaques de verres de 100 μm , à la surface du milieu poreux. Le signal réfléchi est important mais le réglage du parallélisme peut comporter un biais dans la mesure où les deux faces du réflecteur n'ont pu être réalisées parfaitement parallèles. Nous supposons néanmoins ce réglage suffisant car le phénomène de diffusion élargi considérablement le spectre angulaire du faisceau acoustique⁴⁸. Un léger défaut de parallélisme ne sera donc pas totalement néfaste à la mesure.

4.03-4 MESURE DES PARAMETRES S

Ces réglages accomplis, nous effectuons la mesure des trois paramètres S à l'analyseur de réseau. Les signaux sont transmis à un ordinateur qui en calcule les transformées de Fourier inverse. Nous détectons les positions des impulsions utiles.

Le milieu poreux est retiré du système de mesure.

Nous mesurons ensuite le paramètre S_{21} de référence. Nous utilisons un générateur de salves et un oscilloscope pour observer les signaux de référence dans le domaine temporel. Nous ajustons la distance entre les deux transducteurs de façon à obtenir un temps de vol dans l'eau proche de celui obtenu en présence du milieu poreux. Les transducteurs sont à nouveau connectés à l'analyseur de réseau pour la mesure du paramètre S_{21} de référence.

Le réflecteur est introduit dans la cuve de mesure à la place du milieu poreux. Nous réglons l'angle d'incidence sur le réflecteur suivant le même protocole que pour le milieu poreux. Comme pour le paramètre S_{21} , les signaux réfléchis sont visualisés à l'oscilloscope. La distance entre le transducteur et le réflecteur est ajustée pour obtenir des temps de vols identiques pour les paramètres de réflexions mesurés sur le milieu de référence et sur le milieu poreux. Nous mesurons les paramètres S_{11} et S_{22} de références.

⁴⁸ Perdigao J.M., "*Optimisation du contrôle par ultrasons des milieux hétérogènes*", Thèse de doctorat, Université de Valenciennes, jul 1984 ,p44-54 et p61-67

4.04 TRAITEMENT DU SIGNAL SUR LES PARAMETRES S MESURES

Nous détaillons la méthode de traitement du signal pour les mesures de paramètres S effectuées sur une céramique d'hydroxy apatite poreuse (M.P.). Le diamètre des pores est compris entre 200 μm et 300 μm , le diamètre de la céramique est de 20 mm et son épaisseur de 10 mm. Nous avons utilisé une paire de transducteurs résonants à 1 MHz, le diamètre du faisceau est de 6 mm. Les mesures sont effectuées au centre de la céramique. La bande fréquentielle BW de chaque point de mesure est choisie à 300 Hz. Les paramètres S sont mesurés sur une bande de 500 kHz à 2 MHz avec un incrément de fréquence de l'ordre du kilo Hertz.

Nous représentons également les mesures de caractérisation des transducteurs (Ref).

4.04-1 MESURES BRUTES, DOMAINE FREQUENTIEL ET TEMPOREL

La figure 4-3 suivante représente, les parties réelles et imaginaires des signaux mesurés.

Les exponentielles complexes sont modulées en amplitude par les fonctions de transductions $K_{ij}(f)$.

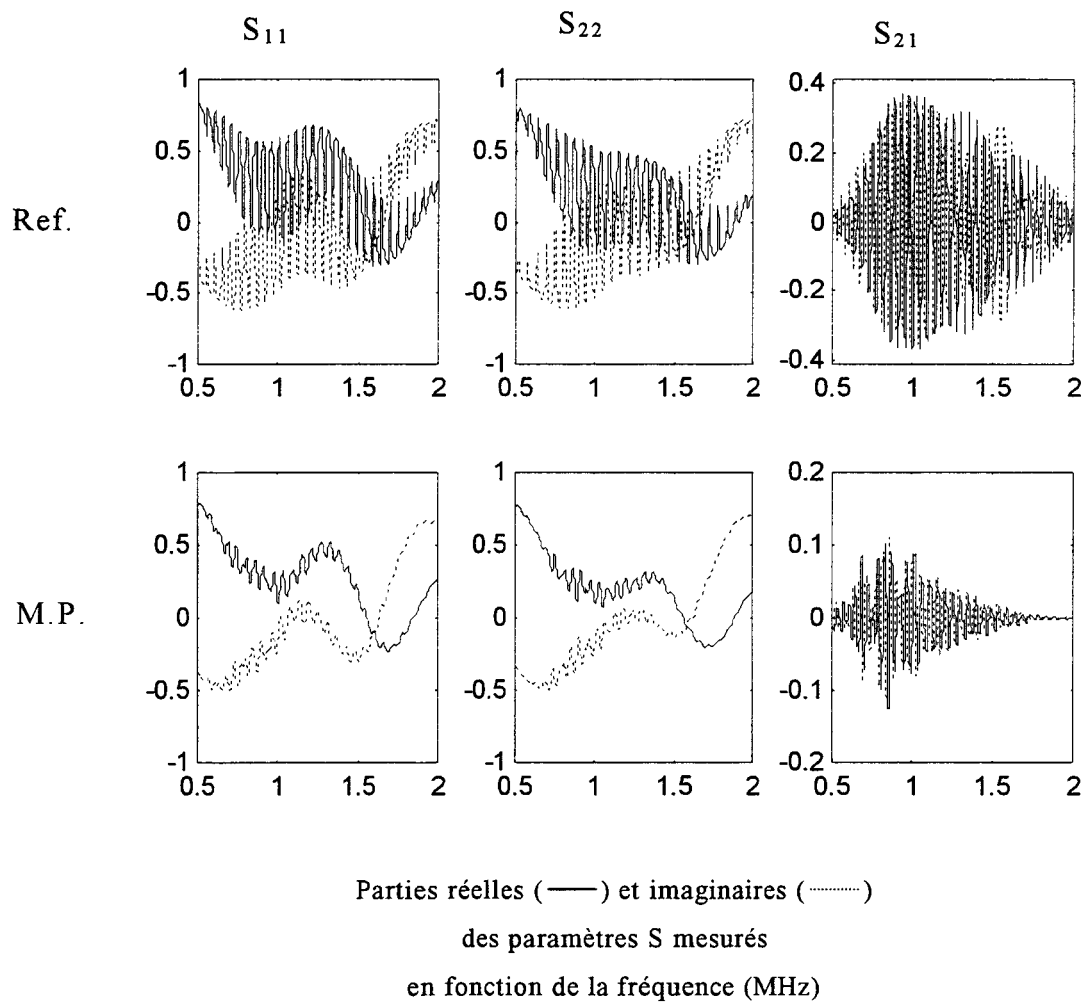
La superposition aux fonctions $S_{11}^\infty(f)$ et $S_{22}^\infty(f)$ apparaît nettement sur les paramètres de réflexion.

La réflexion est totale dans le cas des mesures de référence. Ainsi, le niveau associé aux exponentielles complexes est nettement plus important sur les paramètres de réflexion de référence que sur ceux mesurés sur le milieu poreux.

Il en est de même des paramètres de transmission pour des raisons similaires.

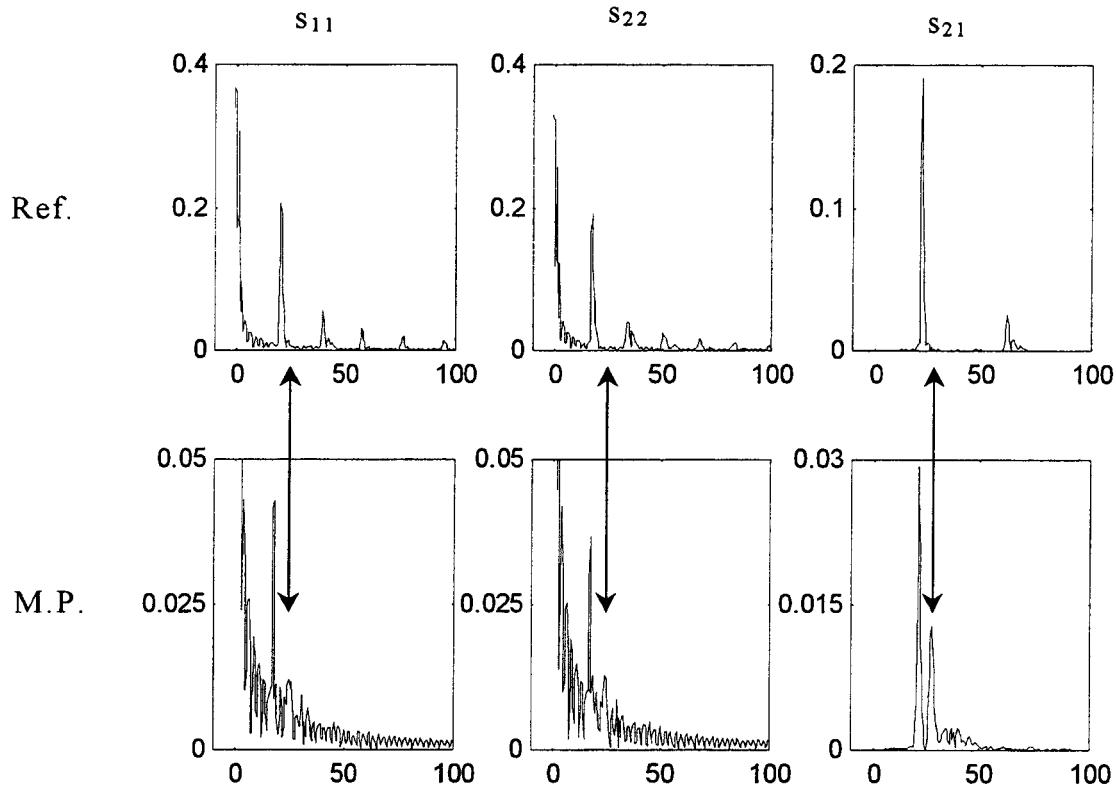
Comparés aux signaux de simulation nous pouvons prédire un coefficient de réflexion beaucoup plus faible sur le milieu poreux.

Figure 4-3 : les 6 paramètres S dans le domaine fréquentiel



La figure 4-4 suivante représente la transformée de Fourier inverse des paramètres précédents.

Figure 4-4 : les 6 paramètres s dans le domaine temporel



Modules des transformées de Fourier inverse des paramètres S
en fonction du temps (μs)

Les impulsions utiles des paramètres de réflexion sont presque noyées dans les lobes secondaires de la composante bas temps de vol. Ceci est dû au faible coefficient de réflexion.

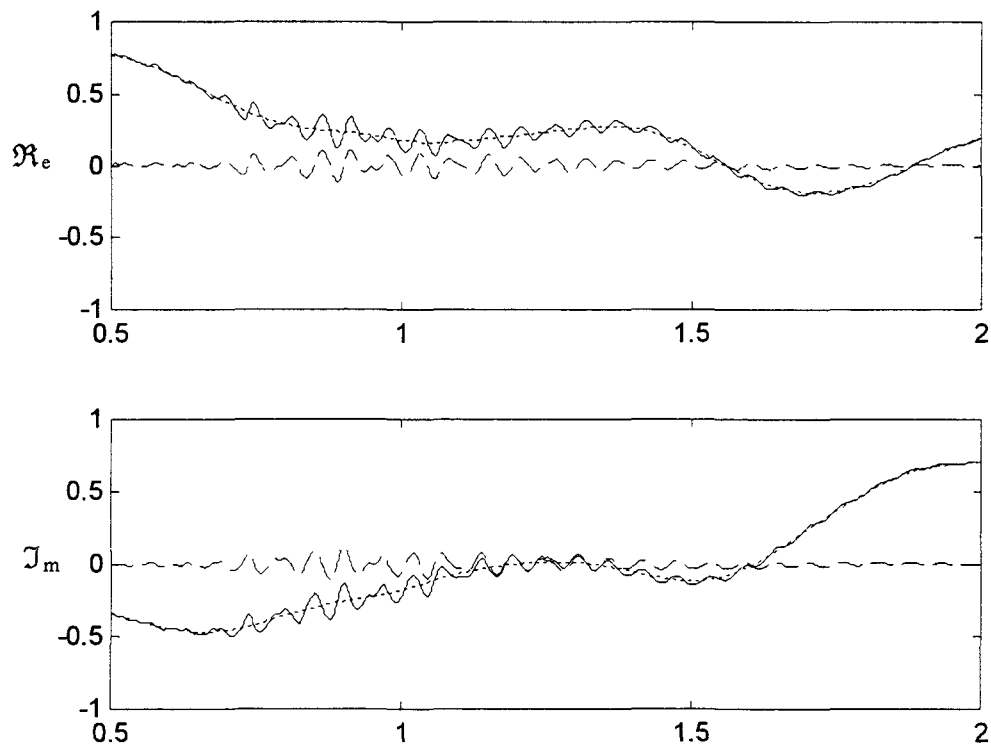
Les allers-retours dans le milieu poreux ($\updownarrow$) sont visibles sur les trois paramètres. Ces niveaux sont plus importants que ceux, quasiment inexistantes, obtenus en simulation. Le coefficient de réflexion est pourtant plus faible. L'atténuation de l'onde dans le matériau doit, elle aussi, être beaucoup plus faible.

On observe que les impulsions correspondant aux allers-retours entre les deux transducteurs pour les mesures de référence paraissent être composées de plusieurs signaux. Nous avons fait la même observation en simulation. Ce phénomène résulte des effets des fonctions de transduction sur le coefficient de réflexion des transducteurs.

4.04-2 EXTRACTION DES COMPOSANTES ELECTRIQUES ET ACOUSTIQUES

Il convient de filtrer les composantes électriques S_{ii}^∞ des composantes acoustiques pour les paramètres S de réflexion. Comme cela a été décrit précédemment nous utilisons un filtre à moyenne mobile. La figure 4-5 suivante illustre ce traitement.

Figure 4-5 : *séparation des composantes électrique et acoustique*



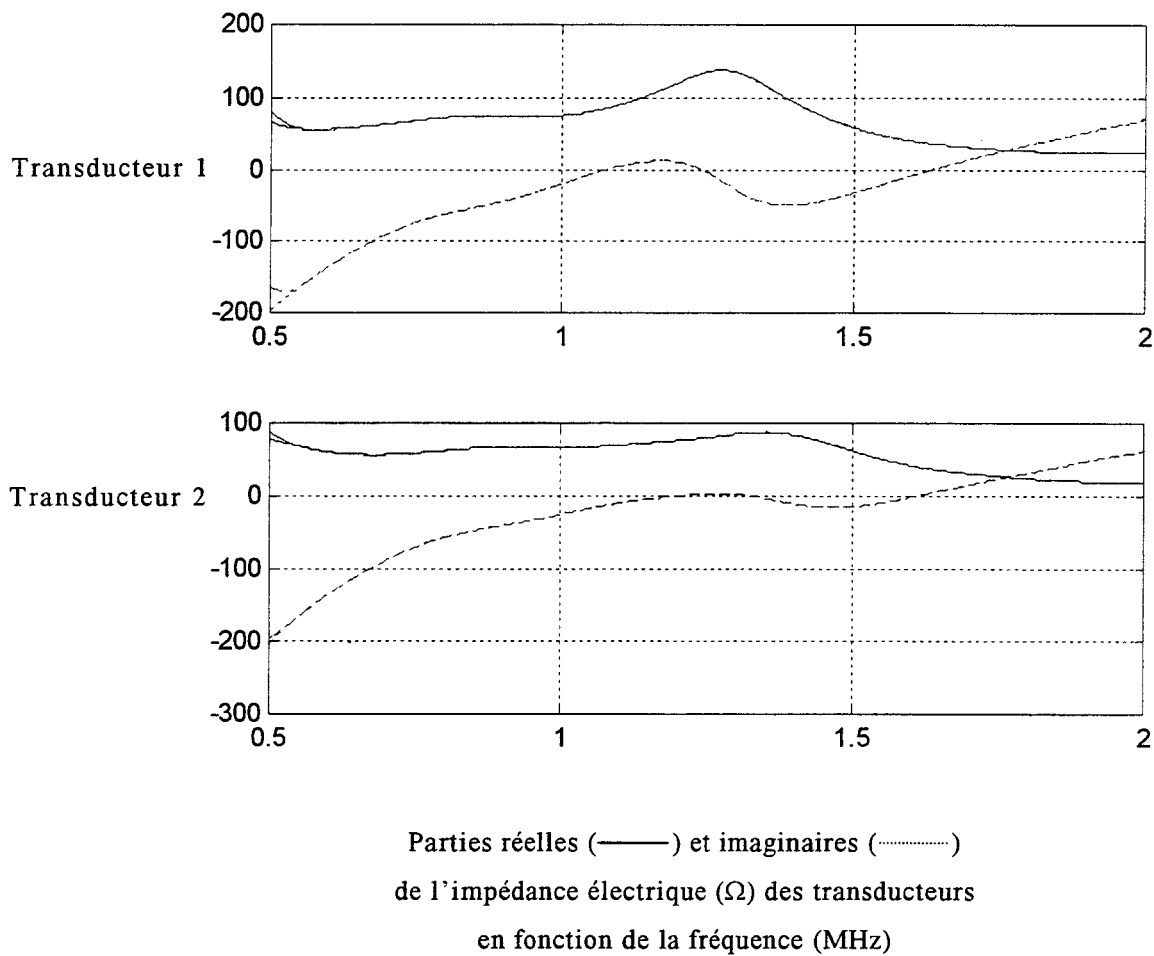
Parties réelles et imaginaires en fonction de la fréquence (MHz)

du paramètre S_{11} (—)
 de sa composante électrique (.....)
 de sa composante acoustique (---)

4.04-3 IMPEDANCE ELECTRIQUE DES TRANSDUCTEURS

Nous pouvons extraire les valeurs de l'impédance électrique des transducteurs à partir de leurs composantes électriques⁴⁹, $Z_{el}^{(i)} = 50 \frac{1+S_{ii}^{\infty}}{1-S_{ii}^{\infty}}$. Nous disposons de deux mesures pour chaque paramètre. L'une est effectuée sur le milieu poreux, l'autre sur le milieu de référence.

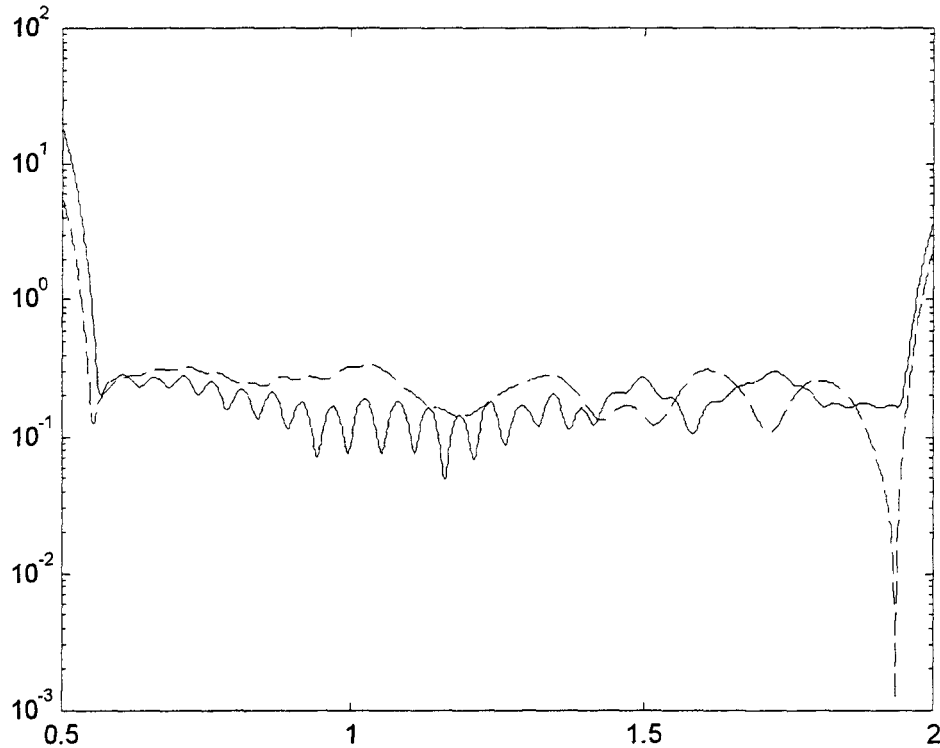
Figure 4-6 : impédance électrique des deux transducteurs



Pour chacun des deux transducteurs, nous calculons l'écart $E = 100 \left| \frac{\Delta Z}{\langle Z \rangle} \right|$ entre les deux mesures sur la figure 4-7 suivante. Il n'excède pas 0,5 % dans la bande centrale.

⁴⁹ Deblock Y., Campistron P., Lippert M., Bruneel C., "Electrical characterization of plate piezo electric transducer bounded to a finite substrate", J. Acoust. Soc. Am. 111 (6) pp 2681-2685, jun 2002

Figure 4-7 : écart entre les impédances électriques calculées à partir des signaux de référence et de mesure sur le milieu poreux



Ecart (%) sur les valeurs des impédances électriques
entre les mesures effectuées
sur le milieu de référence et sur le milieu poreux
des transducteurs 1 (—) et 2 (-----)
en fonction de la fréquence (MHz)

Les ondulations liées au filtrage apparaissent. Il n'apparaît pas de différences significatives excepté en début et en fin de bande. Ceci est dû aux effets de bord introduits par le filtrage.

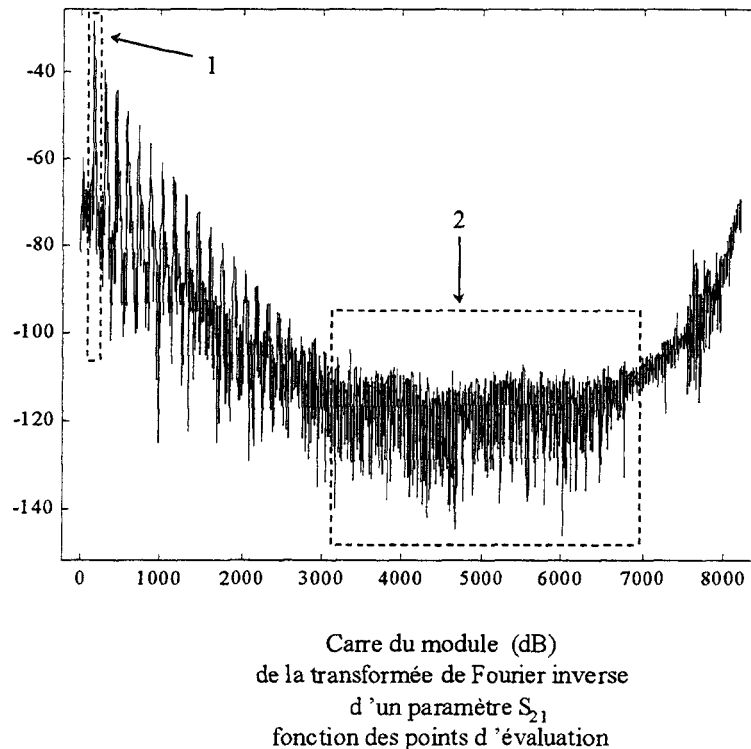
Notons que les mesures des impédances électriques $Z_{el}^{\infty(1)}$ et $Z_{el}^{\infty(2)}$ peuvent n'être effectuées qu'une seule fois sur le milieu de référence. C'est une première étape de la caractérisation des transducteurs. Les composantes électriques sont calculées à partir de leurs définitions $S_{ii}^{\infty} = \frac{50 - Z_{el}^{\infty(i)}}{50 + Z_{el}^{\infty(i)}}$ et sont directement retranchées des

paramètres S_{ii} mesurés pour la caractérisation. Nous avons toutefois tenu à en exposer les résultats de façon à valider expérimentalement les expressions obtenues dans le chapitre 2.

4.04-4 RAPPORT SIGNAL A BRUIT

Le rapport du signal à bruit associé à une impulsion utile est estimé à partir du carré du module de la représentation temporelle des paramètres S observés sur toute l'échelle de temps disponible.

Figure 4-8 : *sélection du signal et du bruit de mesure*



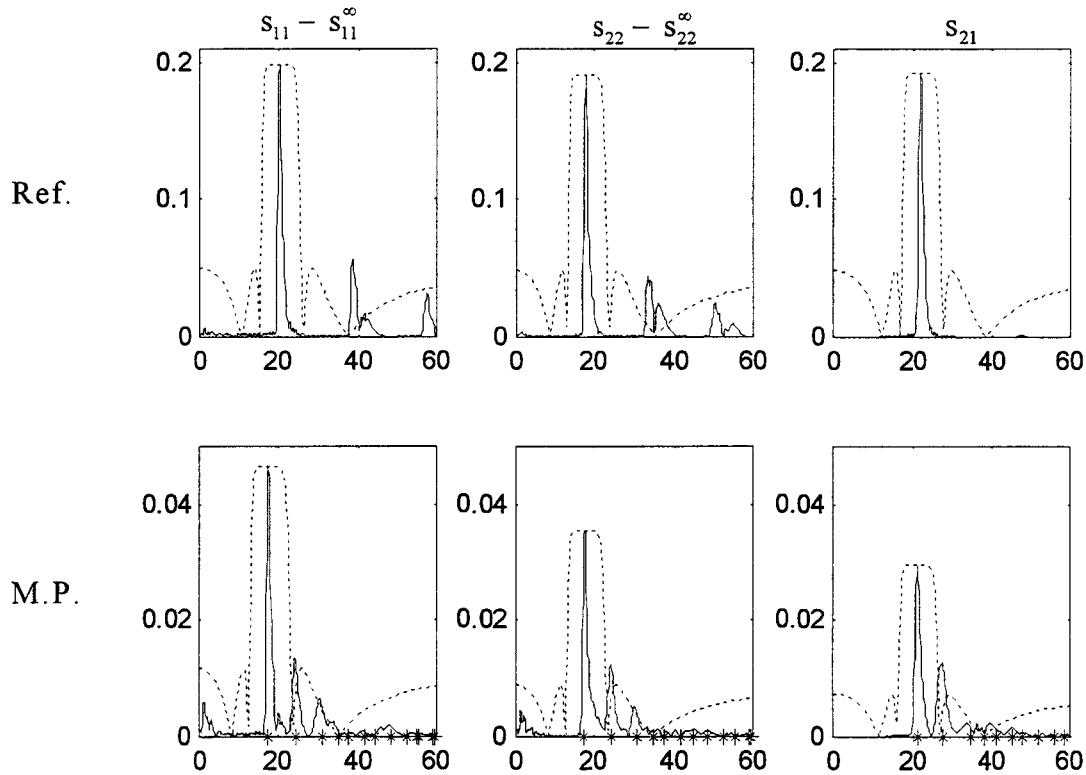
L'énergie contenue dans le signal est estimée à partir de l'intégrale de l'impulsion utile, dans la zone 1. Celle contenue dans le bruit, supposé uniforme dans le domaine temporel, est obtenue en multipliant la moyenne du signal dans la zone 2 par le nombre de points total. Nous obtenons des rapports signal à bruit de l'ordre de 50 dB pour les signaux de références et de l'ordre de 40 dB pour les signaux de mesures sur milieu poreux. Notons que le niveau de bruit se trouve aux environs de 120 dB qui est aussi la valeur donnée par le constructeur de l'analyseur de réseau.

En simulation, nous avons pris pour l'énergie du signal, l'énergie contenue dans toutes les impulsions. Ici nous n'avons bien sûr pas accès à la version non bruitée des paramètres S . Le rapport signal sur bruit est donc calculé à partir de l'énergie de l'impulsion utile seule. Nous sommes donc dans des conditions plus favorables qu'en simulation pour des rapports signaux sur bruits équivalents.

4.04-5 FILTRAGE DES IMPULSIONS UTILES

Les composantes acoustiques des paramètres S ne sont pas pour autant directement utilisables puisqu'il reste à en filtrer tous les échos. Nous en présentons les versions temporelles sur la figure 4-9 suivante.

Figure 4-9 : représentation temporelle, réponse impulsionnelle des filtres $F_{ac.ut.}$.



Modules des transformées de Fourier inverse des paramètres S (—)

Produit du module de la réponse impulsionnelle du filtre $F_{ac.ut.}$

par le maximum du module de l'impulsion utile de chaque paramètre (- - - -)

positions des impulsions déduites de t_{002} , t_{200} et t_{111} (*)

en fonction du temps (μs)

Nous pouvons évaluer les instants t_{111} , t_{200} et t_{002} d'apparition des impulsions utiles pour les mesures effectuées sur le milieu poreux. Nous en tirons les positions théoriques de toutes les autres impulsions
$$\left(t_{npq} = n t_{200} + p \left(t_{111} - \frac{t_{200} + t_{002}}{2} \right) + q t_{002} \right).$$

Représentés sur la figure 4-9, ils correspondent bien avec les impulsions apparaissant dans les représentations temporelles.

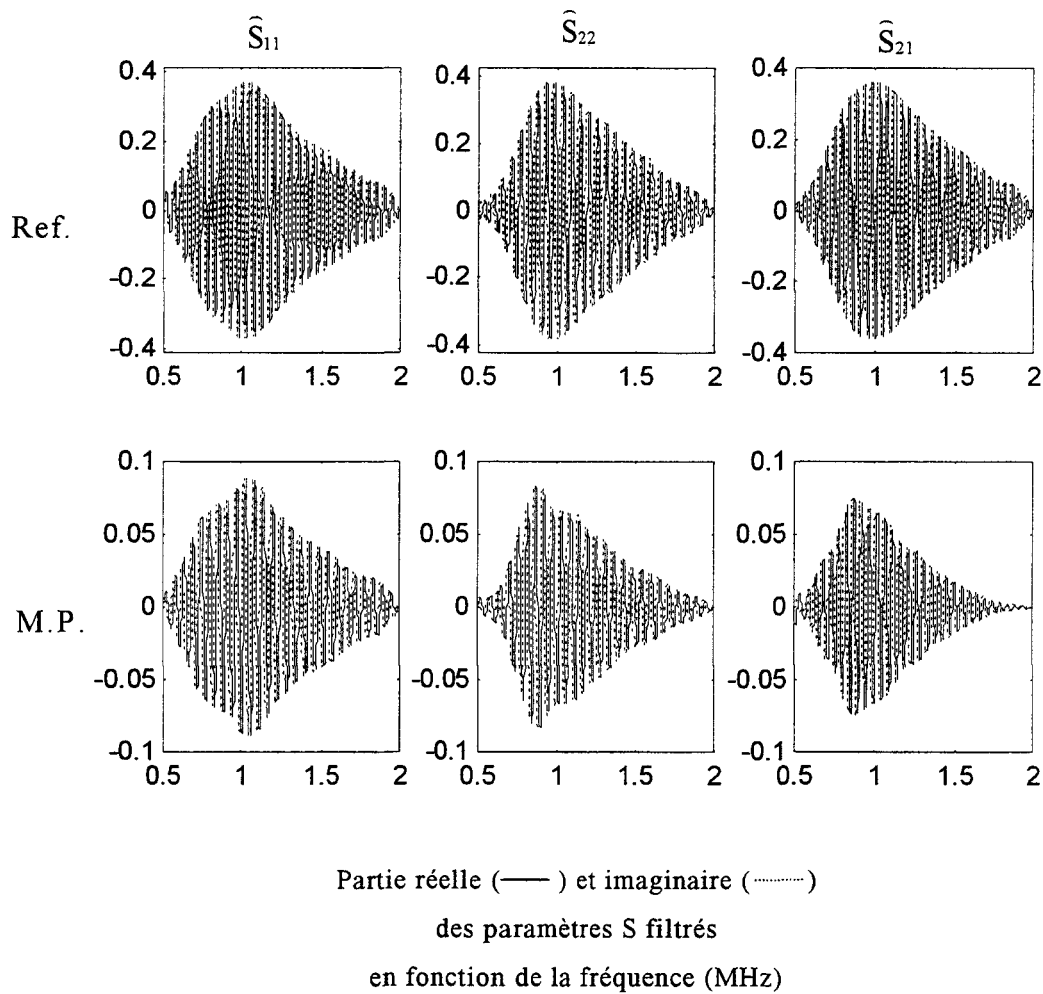
Notons :

- que nous nous trouvons à la limite de séparation de l'impulsion utile.
- la cohérence entre les positions de tous les impulsions calculées à partir de l'évaluation des positions des seules impulsions utiles.
- que nous ne discernons pas la présence des deux ondes longitudinales prévues par le modèle de Biot.

Nous mesurons pour chaque paramètre, les écarts de temps Δt entre les impulsions utiles et les impulsions suivantes. Cet écart, ici de 6,75 μs , ne varie que très peu sur les trois paramètres S. La variation est de l'ordre de quelques dizaines de nanosecondes alors que la relation d'Heisenberg-Gabor nous donne une indétermination sur la mesure d'un temps de vol de l'ordre de 50 nanosecondes avec la bande fréquentielle utilisée. Il est donc inutile de rechercher à obtenir une meilleure estimation de Δt . Nous définissons la réponse impulsionnelle d'un filtre de Chebyshev de type 2 en accordant une atténuation maximale de 0,1 dB, une largeur de Δt pour la bande passante, et une atténuation minimale de -12 dB avec une largeur de $2\Delta t$ pour la bande de coupure. Nous centrons les gabarits sur les maxima des impulsions utiles.

Nous obtenons alors une estimation des paramètres S filtrés, $\hat{S}_{11}^{réf}$, $\hat{S}_{22}^{réf}$, $\hat{S}_{21}^{réf}$, $\hat{S}_{11}$, $\hat{S}_{22}$ et $\hat{S}_{21}$.

L'effet des fonctions de transductions en reste clairement visible sur la figure 4-10 suivante. Les paramètres S mesurés sur le milieu de référence, démodulés en amplitude, seront la mesure des fonctions de transduction.

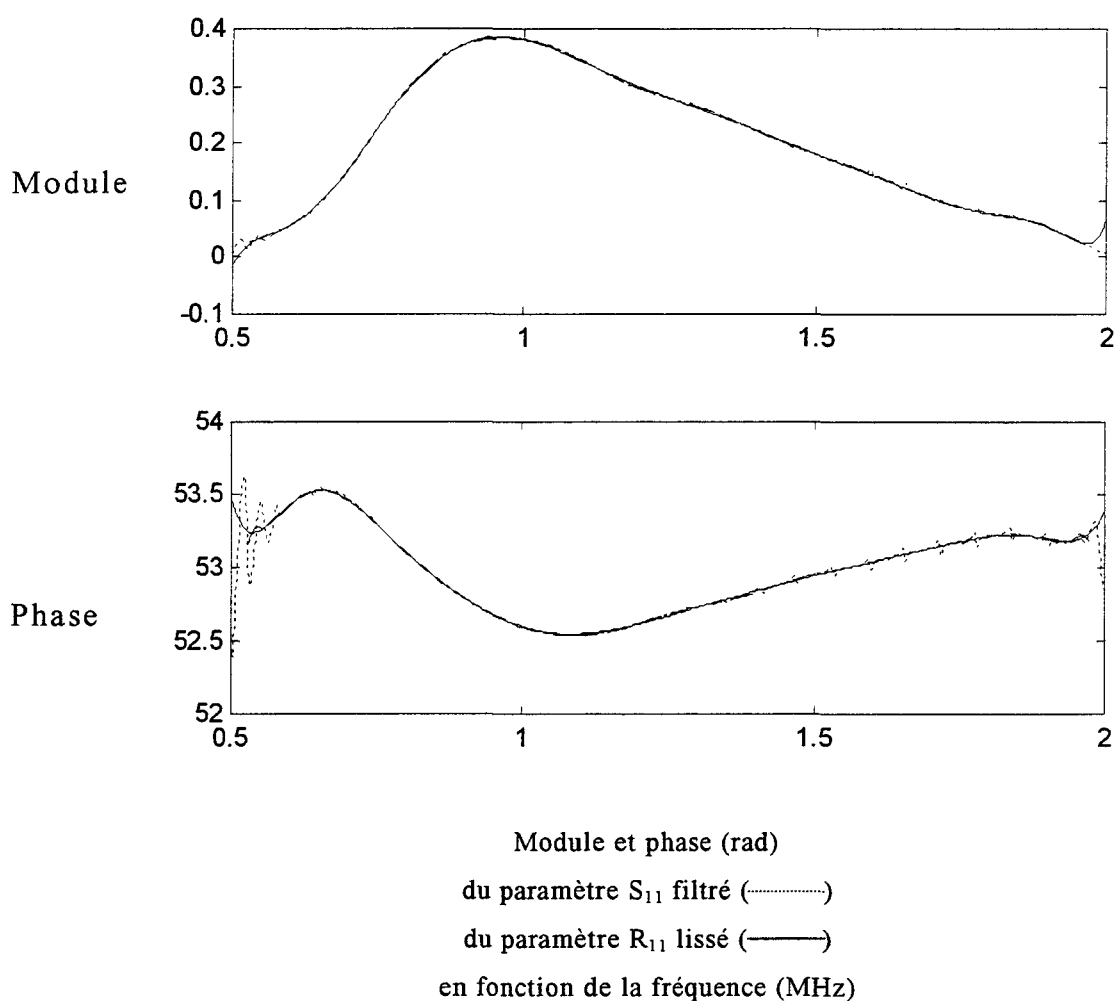
Figure 4-10 : représentation fréquentielle des paramètres S filtrés

4.04-6 ÉGALISATION DES SIGNAUX

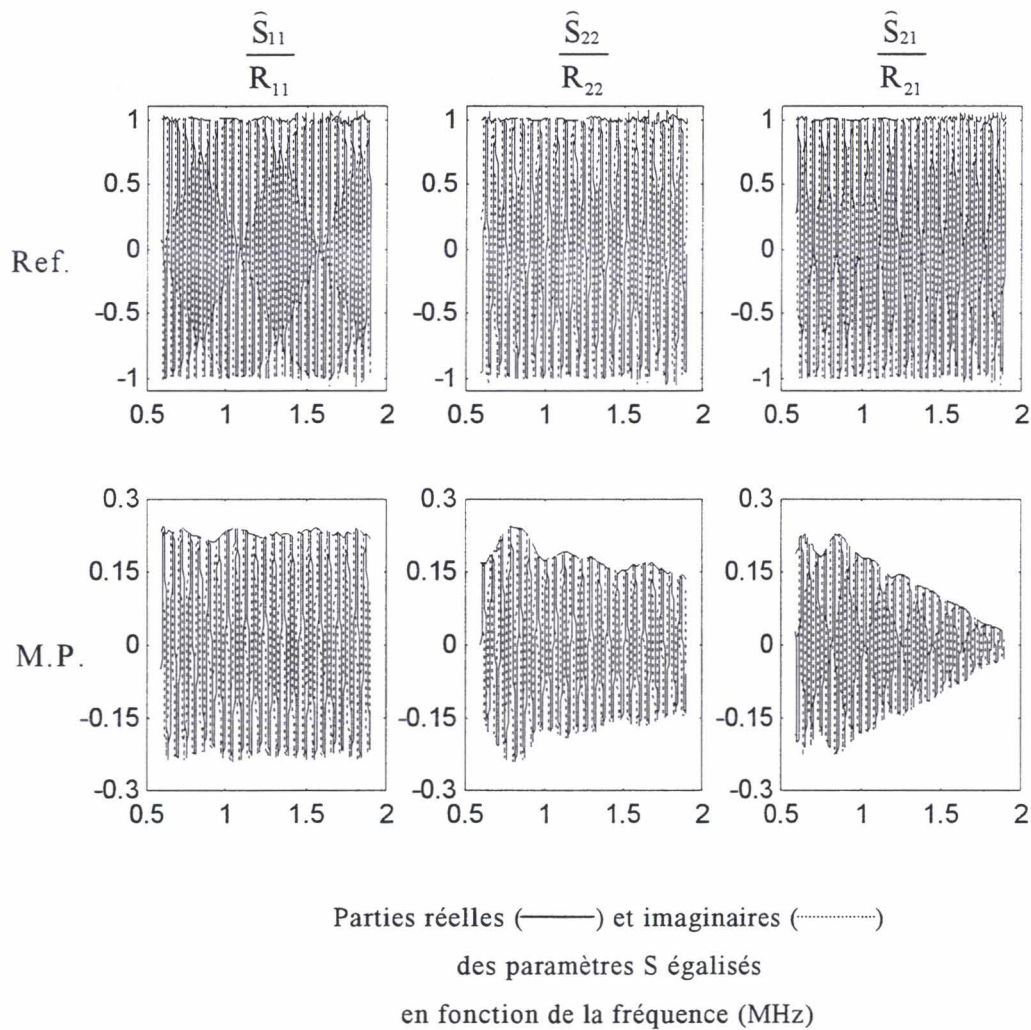
Les paramètres S mesurés sur le milieu de référence sont démodulés en amplitude puis nous recherchons une régression polynomiale afin de les lisser.

Nous avons alors accès aux fonctions égalisatrices R_{11} , R_{22} et R_{21} des effets de la transduction électro-acoustique.

Figure 4-11 : lissage des fonctions de transduction



La figure 4-12 suivante représente les paramètres S égalisés. Comme nous l'avons vérifié en simulation, les paramètres mesurés sur le milieu de référence affichent bien les comportements d'exponentielles complexes. Leurs modules restent confinés à l'unité excepté quelques oscillations résiduelles en début et en fin de bande. Les paramètres S mesurés sur le milieu poreux voient leurs niveaux augmenter.

Figure 4-12 : égalisation des paramètres S 

Si le module du paramètre S_{11} reste à peu près constant sur la bande de mesure, ce n'est pas le cas du paramètre S_{22} qui laisse entrevoir des fluctuations importantes de son module. Ces deux modules représentant le coefficient de réflexion en surface du milieu poreux devraient être très proches, cela était le cas en simulation. Les seules différences qui apparaissaient étaient dues au filtrage. Les écarts types sur les erreurs étaient faibles, il y a donc une faible probabilité pour que les écarts visibles sur la figure 4-12 soient issues d'un mauvais traitement. Elles sont probablement liées à un mauvais état de la surface du milieu poreux ou à un défaut de parallélisme des faces de la céramique.

La correction des effets d'atténuation dans l'eau est introduite bien que cela ne paraisse pas en raison de la faible absorption que présente ce liquide aux fréquences utilisées.

4.05 EXTRACTION DES CARACTERISTIQUES DE PROPAGATION DU MILIEU POREUX

Nous avons obtenu les paramètres S filtrés et égalisés. Il est maintenant possible d'en extraire les coefficients de réflexion sur la surface du milieu poreux, son atténuation vis à vis de l'onde acoustique s'y propageant et la célérité de cette onde.

Nous disposons des instants d'apparition des différentes impulsions, ainsi que de leurs niveaux. Il est donc possible de caractériser le milieu par une analyse des paramètres S dans le domaine temporel. Cela nous donnera une information moyenne qui permettra de confirmer les résultats obtenus par l'analyse des paramètres S dans le domaine fréquentiel. De plus, l'ordre de grandeur de la célérité, nécessaire à la levée de l'indétermination de $2n\pi$ sur la phase du paramètre S_{21} , nous sera fourni par l'analyse temporelle. Nous appliquons donc conjointement les méthodes de caractérisation dans le domaine fréquentiel et dans le domaine temporel.

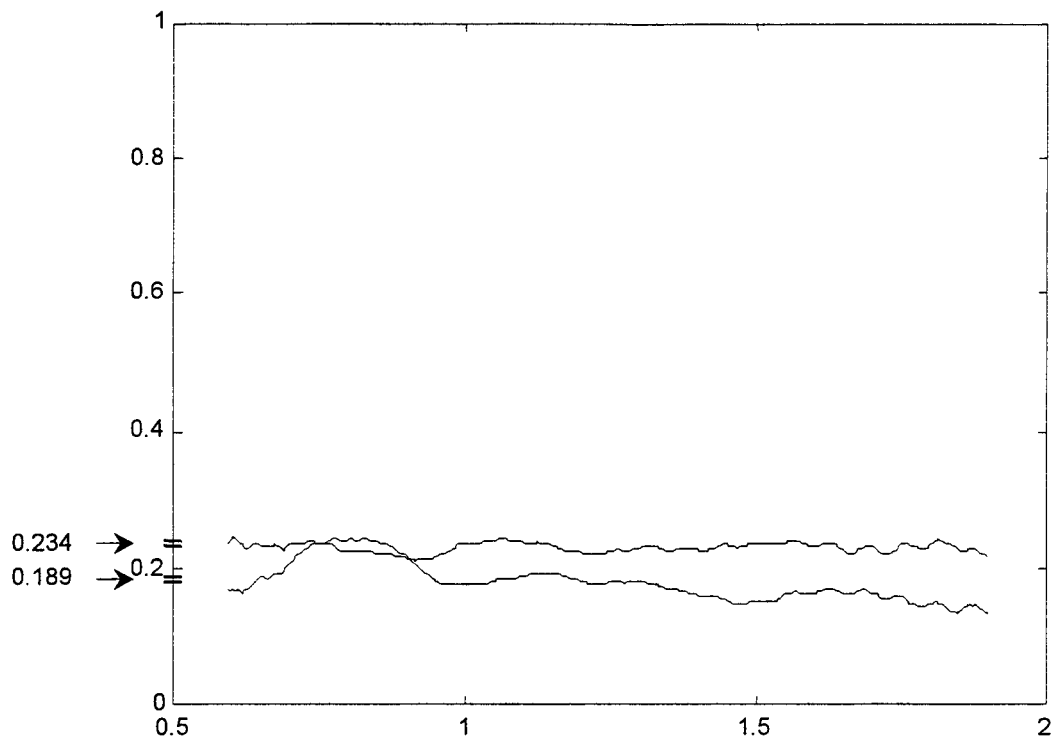
4.05-1 COEFFICIENT DE REFLEXION

Nous les obtenons à partir des paramètres S égalisés, $r_{11}(f) = \left| \frac{\hat{S}_{11}}{R_{11}} \right| e^{\alpha_0 v_0 t_{200}}$ et

$r_{22}(f) = \left| \frac{\hat{S}_{22}}{R_{22}} \right| e^{\alpha_0 v_0 t_{002}}$. Nous avons spécifié la face du milieu poreux à laquelle ils sont

associés puisque leurs valeurs sont différentes. La figure 4-13 suivante représente les coefficients de réflexion mesurés, ils ne sont pas identiques pour les deux faces du milieu poreux. Nous observons un écart de 21 % de leurs valeurs entre les deux faces. Ceci provient très certainement de la mauvaise planéité des faces de l'échantillon et de leur mauvais parallélisme. Nous obtenons par l'analyse temporelle des coefficients de réflexions de 0,234 et de 0,189 pour chacune des faces alors que les valeurs moyennes des analyses fréquentielles valent 0,230 et 0,180. Les deux types d'analyse sont donc parfaitement cohérents.

Figure 4-13 : coefficients de réflexion



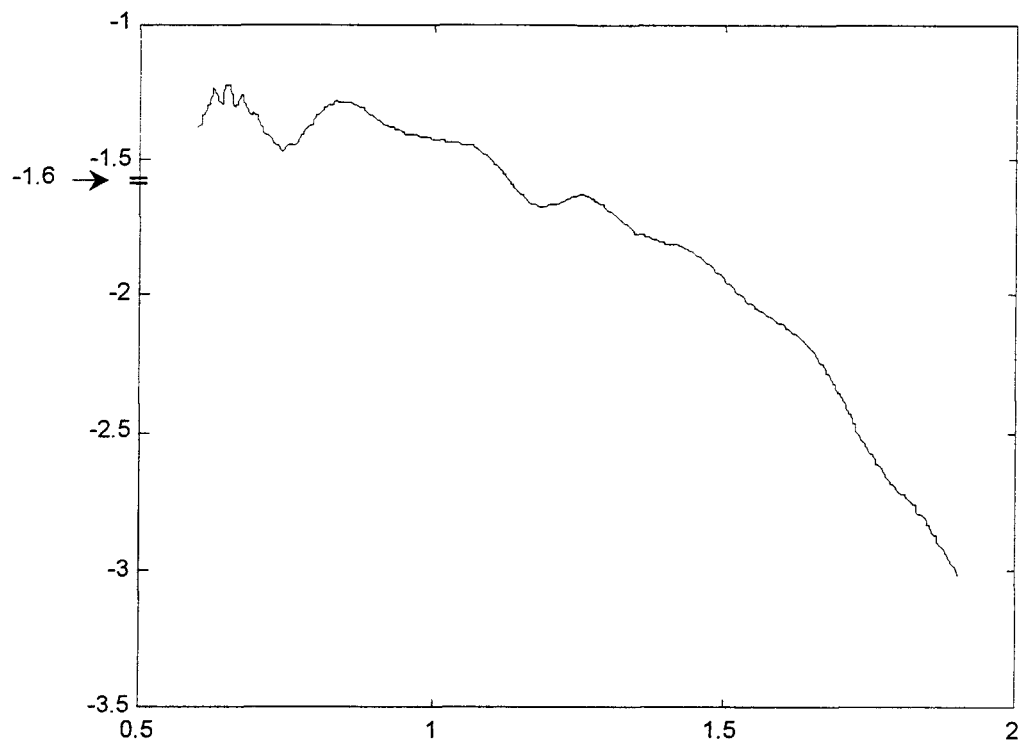
Coefficients de réflexion
 issue de l'analyse fréquentielle (—)
 issue de l'analyse temporelle (—→)
 en fonction de la fréquence (MHz)

4.05-2 COEFFICIENT D'ATTENUATION

Nous le calculons par :

$$\alpha(f) = \frac{\alpha_0 v_0 \left(\frac{t_{200} + t_{002}}{2} \right) + \ln \left[\frac{\hat{S}_{21}}{R_{21}} \frac{1}{(1-r_{11})(1+r_{22})} \right]}{-e_2}$$

Figure 4-14 : Atténuation



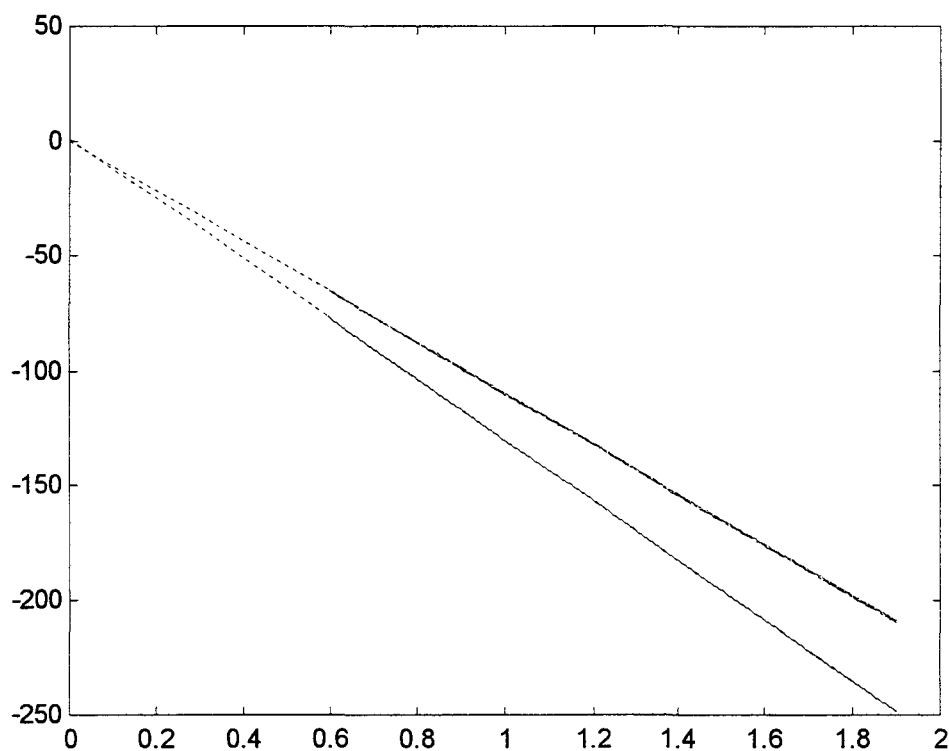
Atténuation ($-\alpha$: dBmm^{-1})
issue de l'analyse fréquentielle (—)
issue de l'analyse temporelle (—→)
en fonction de la fréquence (MHz)

Nous obtenons un coefficient d'atténuation de $1,6 \text{ dBmm}^{-1}$ par l'analyse temporelle et une valeur moyenne de $1,8 \text{ dBmm}^{-1}$ par l'analyse fréquentielle. Soit un écart d'environ 10% entre les deux méthodes, ce qui constitue un bon accord. L'analyse du coefficient d'atténuation dans le domaine fréquentiel fait apparaître un comportement dispersif. Il chute nettement avec la fréquence.

4.05-3 CELERITE

Les phases des paramètres $\hat{S}_{ij}$ sont déroulées sur toute la gamme de fréquences. Elles sont connues à un facteur 2π près caractéristique de la fonction arc tangente. Nous cherchons à en lever l'indétermination. Nous nous sommes affranchis des effets des transducteurs en égalisant les signaux. Les phases des paramètres de réflexion devraient être linéaires en fonction de la fréquence, l'eau n'étant pas un milieu dispersif dans la gamme de fréquence où sont effectuées les mesures. Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 3, nous effectuons les régressions linéaires sur les phases des paramètres de réflexions de façon à pouvoir en retirer l'ordonnée à l'origine. La phase du paramètre de transmission n'est pas forcément linéaire en fonction de la fréquence. Nous ne lui retirons que le modulo 2π de son ordonnée à l'origine.

Figure 4-15 : *phases déroulées, indétermination levée*

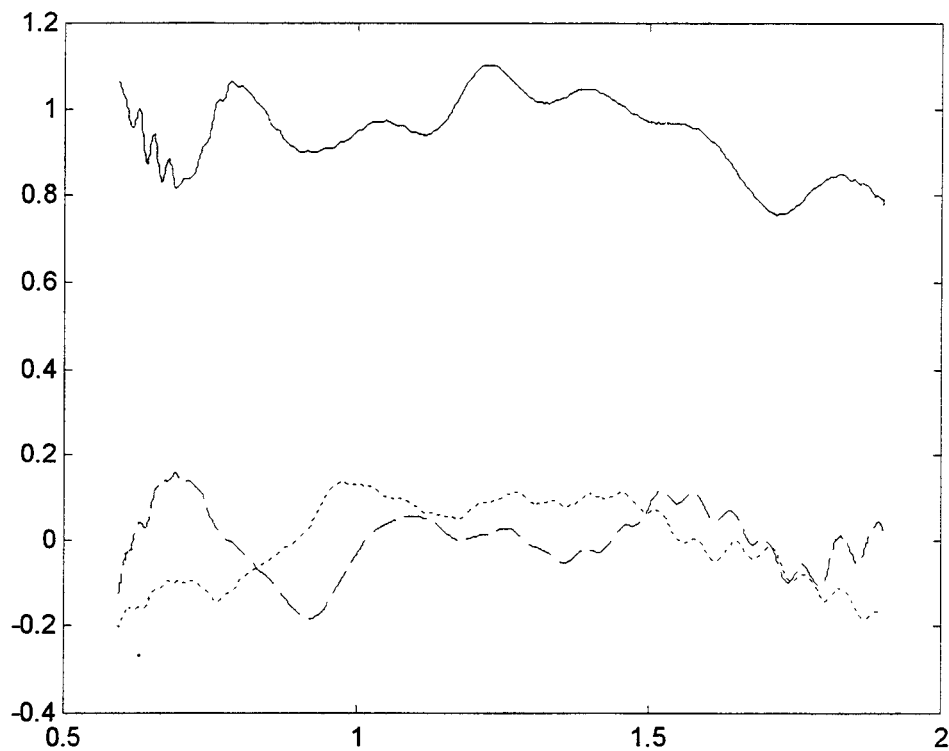


Phases déroulées et indéterminations levées (rad)
en fonction de la fréquence (MHz)

Les épaisseurs des milieux de couplages ont été choisies identiques. Les phases déroulées des paramètres de réflexion égalisés sont quasiment confondues.

Les différences entre les phases mesurées et leurs régressions linéaires apparaissent être faibles sur la figure 4-16 suivante (de l'ordre de 10°). L'ordonnée à l'origine de la phase du paramètre S_{21} égalisée est de l'ordre de 60° . Notons des fluctuations de phases beaucoup plus intenses que lors des simulations.

Figure 4-16 : écarts entre les phases et leurs régressions linéaires



Différences entre les phases et leurs régressions linéaires (rad)
en fonction de la fréquence (MHz)

Paramètre S_{11} (-----)

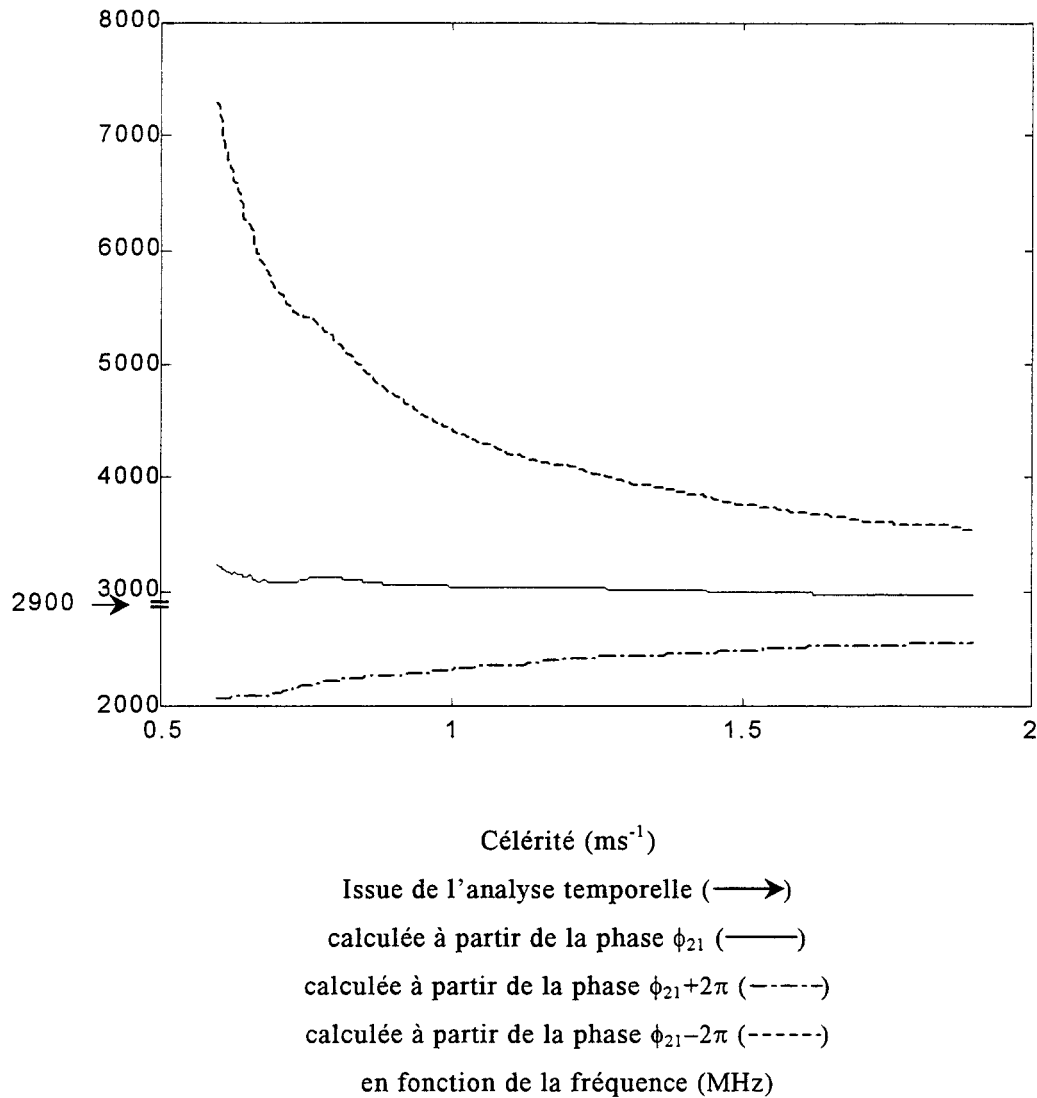
Paramètre S_{22} (----)

Paramètre S_{21} (—)

Nous calculons la célérité $v(f) = \frac{-2\pi f e_2}{\phi_{21} - \frac{\phi_{11} + \phi_{22}}{2}}$.

Afin de s'assurer du bon choix de l'ordonnée à l'origine de la phase du paramètre S_{21} égalisé nous calculons aussi les célérités pour lesquelles nous rajoutons ou retranchons 2π à la phase ϕ_{21} .

Figure 4-17 : célérité



L'analyse temporelle donne une vitesse de l'ordre de 2900 ms^{-1} . La valeur moyenne issue de l'analyse fréquentielle est de 3040 ms^{-1} , soit un écart de 5 %. Les calculs pour lesquels nous avons ajouté ou retranché 2π à la phase sont en net désaccord avec l'analyse temporelle, ce qui nous permet de sélectionner la courbe de célérité qui est probablement la plus proche de la célérité exacte.

4.06 CONCATENATION DES MESURES A DIFFERENTES FREQUENCES

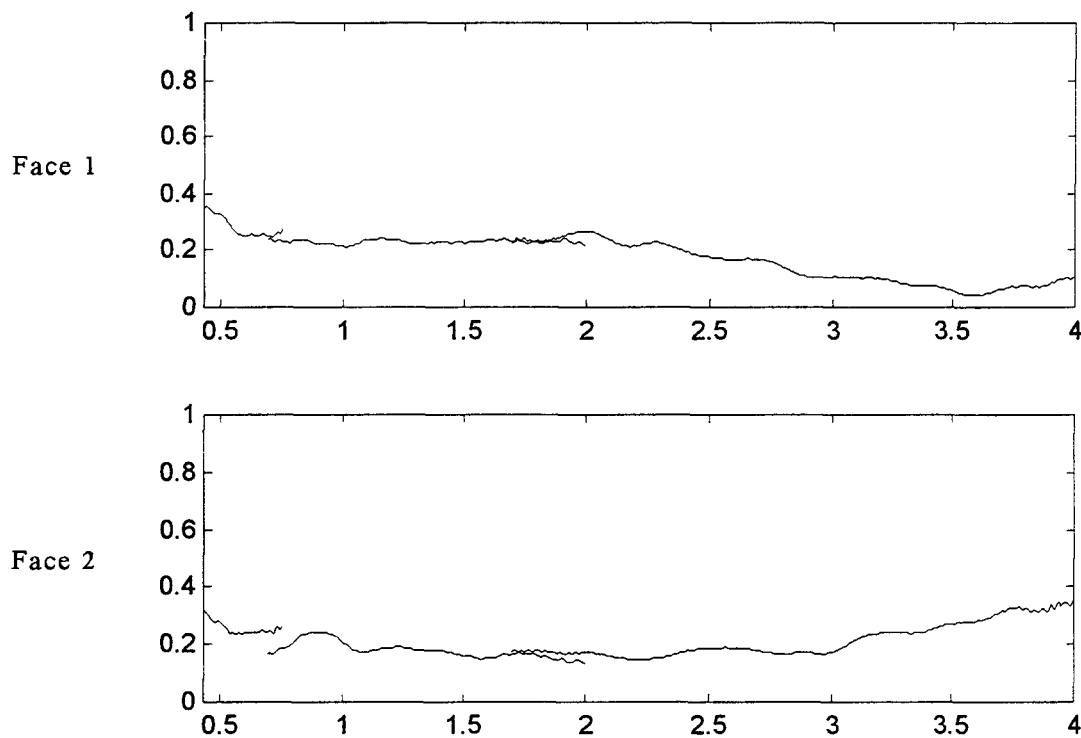
Nous reproduisons ces traitements sur les bandes de fréquences pouvant être obtenues avec des transducteurs de fréquences centrales 500 kHz et 2,5 MHz. Le banc de mesure doit être entièrement déposé afin de changer les transducteurs et de parfaire le parallélisme. Les résultats obtenus sur les trois bandes de fréquences doivent donc être considérés comme issus d'expériences totalement indépendantes. Les bandes des transducteurs se chevauchant, il sera aisé de vérifier la qualité des traitements ainsi que la reproductibilité des mesures.

4.06-1 COEFFICIENTS DE REFLEXION

La figure 4-18 suivante représente les coefficients de réflexion mesurés sur les deux faces du milieu poreux. Les raccordements de bandes sont assez bons.

Le coefficient de réflexion semble tendre vers la valeur 0,35 en basse fréquence. Nous émettons toutefois quelques réserves sur cette valeur. La bande passante des transducteurs BF ($\approx 70\%$ de la fréquence centrale) est plus faible que celle des transducteurs que nous avons utilisés précédemment. Nous nous trouvons à la limite de séparation de l'impulsion utile. La célérité dans le milieu poreux étant sensiblement la même dans les deux cas, nous ne parvenons pas à correctement isoler l'impulsion utile. Il en résulte des battements.

Les comportements en haute fréquence indiquent par contre des tendances différentes pour les valeurs des coefficients de réflexion mesurés sur les deux faces de l'échantillon. Cela peut être dû à une différence des états de surfaces et au parallélisme approché des faces du milieu poreux, auxquels les ondes de hautes fréquences sont plus sensibles que les ondes de basse fréquence pour une même surface insonifiée.

Figure 4-18 : coefficients de réflexion sur les deux faces du milieu poreux

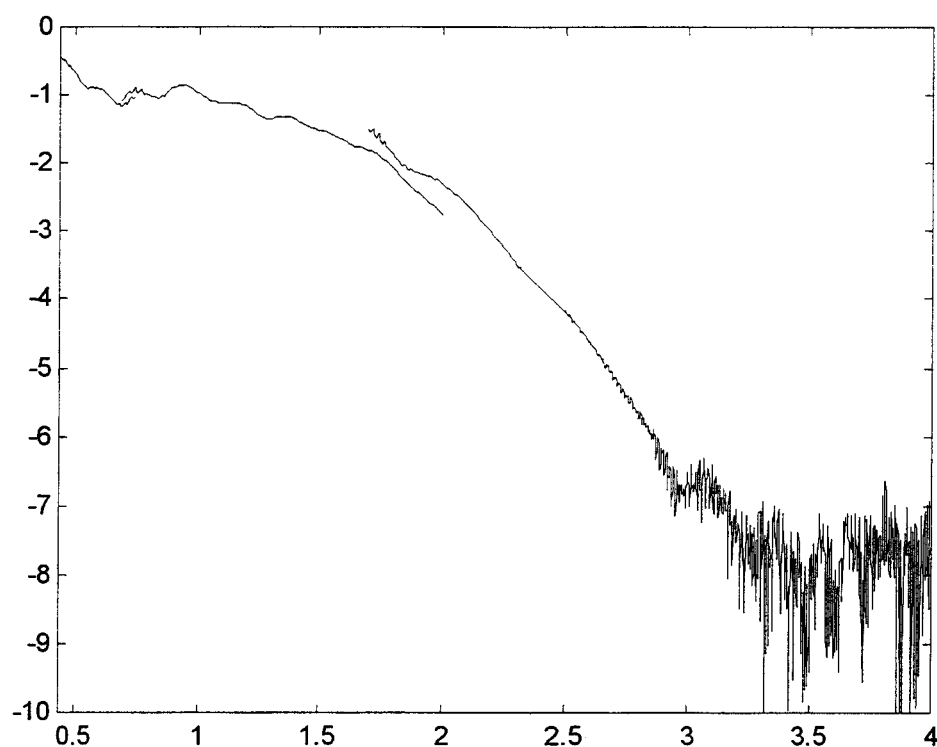
Coefficients de réflexions sur les deux faces du milieu poreux
en fonction de la fréquence (MHz)

4.06-2 ATTENUATION

Nous obtenons aussi, sur la figure 4-19 suivante, un bon raccordement de bande pour l'atténuation.

Le milieu paraît être très peu atténuant en basse fréquence (1 dB/mm). L'atténuation du signal augmente très rapidement avec la fréquence au-delà de 1,5 MHz. Elle atteint les 8 dB/mm aux environs de 3 MHz. Des oscillations importantes se produisent ensuite. L'origine en sera dévoilée au paragraphe 4.09 traitant du comportement en haute fréquence.

Figure 4-19 : Atténuation

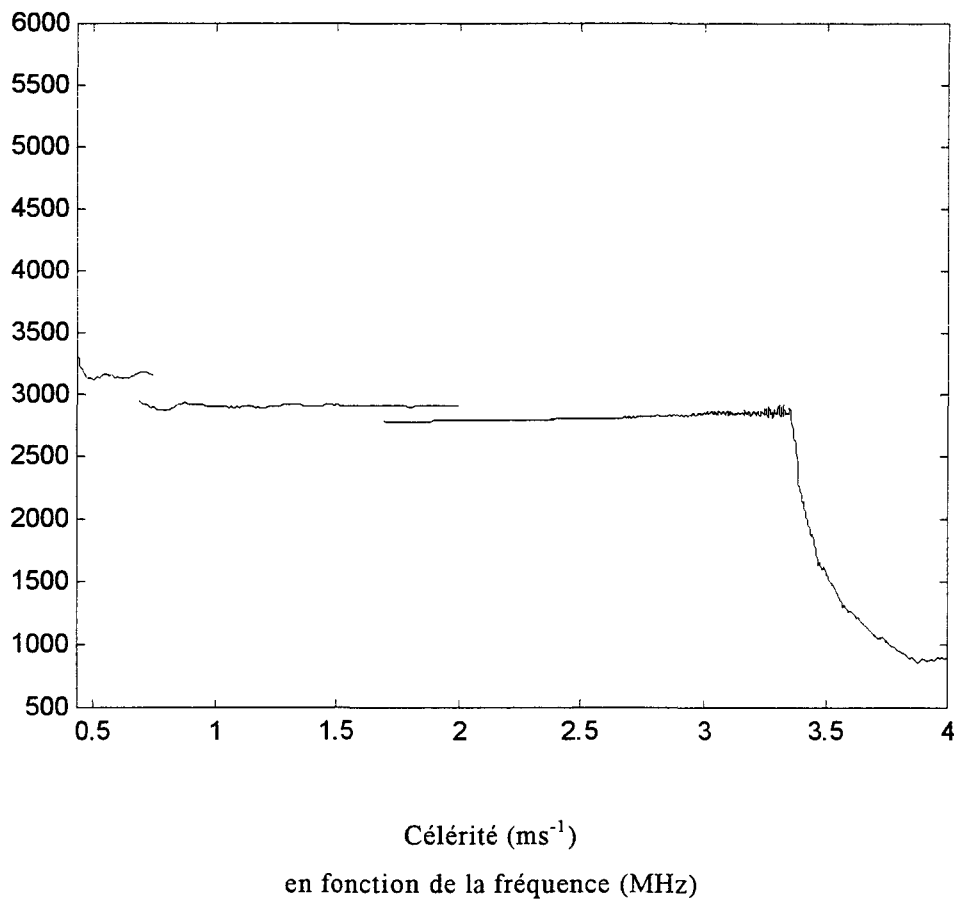


Atténuation ($-\alpha$: dBmm⁻¹)
en fonction de la fréquence (MHz)

4.06-3 CELERITE

Les raccordements de bandes pour la célérité, sur la figure 4-20 suivante, laissent apparaître des écarts de l'ordre de 10 %. Cela constitue des différences importantes pour des mesures de célérités qui sont facilement mesurées dans les milieux homogènes avec une précision de l'ordre de 1 %. Ces relativement mauvais résultats doivent surtout être attribués aux difficultés de reproductibilités des mesures effectuées sur les milieux hétérogènes, les adéquations avec les valeurs obtenues par une analyse dans le domaine temporel restant très bonnes.

Notons qu'il n'a jamais été nécessaire, pour ces courbes, de modifier la phase des paramètres S_{21} égalisés.

Figure 4-20 : célérité

La célérité affiche un comportement assez peu dispersif.

Elle diminue lentement d'environ 3400 ms^{-1} à environ 3000 ms^{-1} entre 400 kHz et 3,3 MHz. Une anomalie apparaît ensuite en une chute brutale de la célérité. Nous avons rencontré ce phénomène en simulation. Il était apparu lors du traitement en dehors de la bande de transduction, et était dû au trop faible rapport signal à bruit. Nous nous sommes placés dans des conditions telles que la transduction soit bonne sur toute la bande de traitement. Ici la défaillance du traitement est entièrement due à l'importante atténuation du signal transmis dans cette gamme de fréquence. L'impulsion utile disparaît quasiment. Ce comportement se retrouvera sur la caractérisation d'autres matériaux. Il fait l'objet du paragraphe 4.09 suivant et délimite la fréquence au-delà de laquelle la technique de traitement proposée n'est plus applicable.

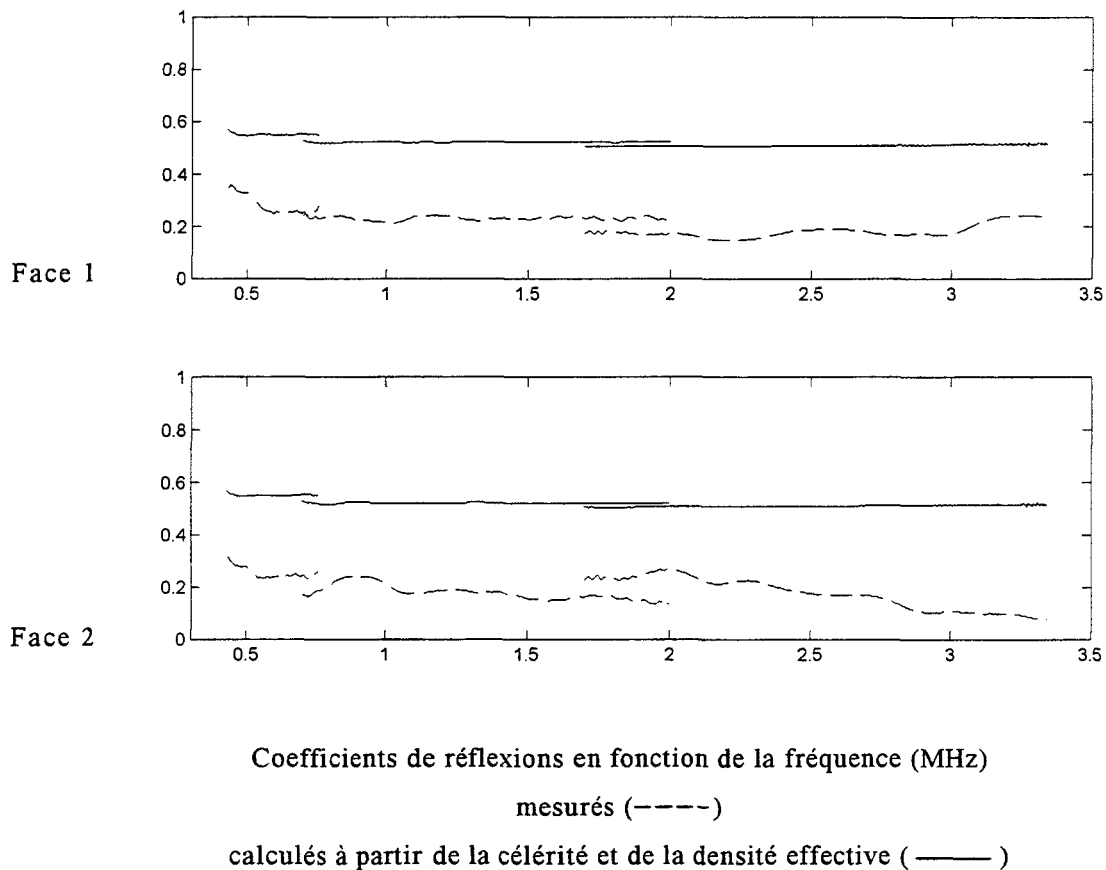
4.07 CORRECTION SUR L'ATTENUATION

La célérité de l'onde acoustique dans le milieu poreux a été évaluée. Nous connaissons la porosité de ce milieu et les masses volumiques de ses deux constituants.

Il est donc possible de calculer sa masse volumique effective, $\rho_{\text{eff}} = (1-\beta)\rho_{\text{HA}} + \beta\rho_{\text{eau}}$, d'en déduire son impédance caractéristique, $Z_{\text{eff}} = \rho_{\text{eff}} v$ puis le coefficient de réflexion à son interface avec le milieu de couplage, $r_{\text{eff}} = \frac{Z_{\text{eff}} - Z_{\text{eau}}}{Z_{\text{eff}} + Z_{\text{eau}}}$.

Nous nous apercevons alors qu'il est environ deux fois plus important que celui mesuré.

Figure 4-21 : *erreur sur les coefficients de réflexion*



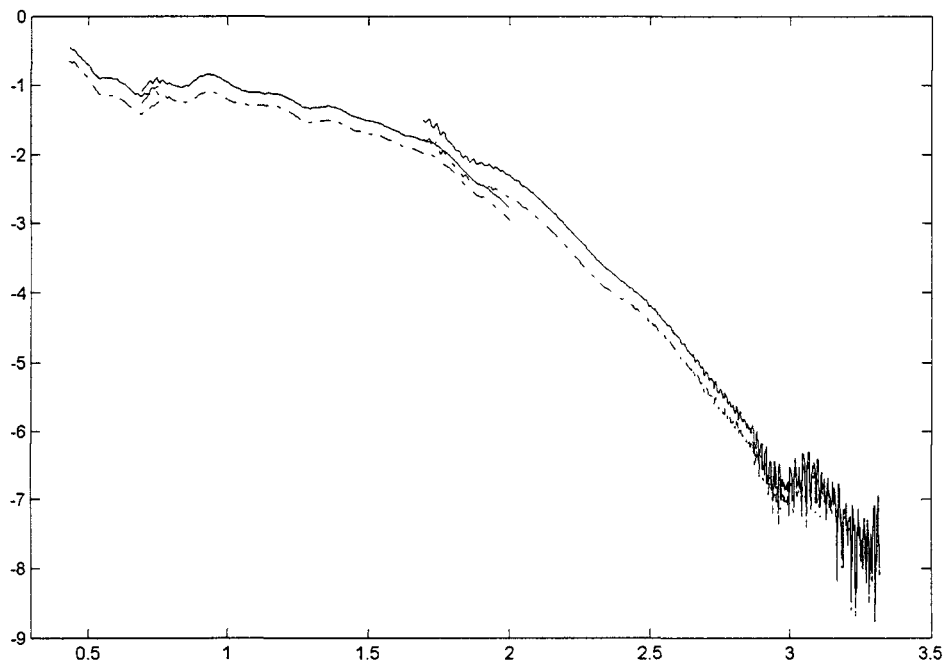
Cet écart est dû, d'une part au choix d'une méthode de caractérisation d'un milieu homogène pour un milieu hétérogène, nous ne tenons pas compte de l'élargissement

du spectre angulaire des signaux réfléchis, d'autre part à l'état de surface de l'échantillon, et au réglage du parallélisme. Cela conduit à une sous évaluation du coefficient de réflexion. L'algorithme identifie cette perte d'énergie à un excès d'absorption dans le milieu poreux. Ainsi donc, la sous-évaluation du coefficient de réflexion entraîne une surévaluation du coefficient d'atténuation.

Nous calculons alors le coefficient d'atténuation :

$$\alpha_{\text{cor}}(f) = \frac{\alpha_0 v_0 \left(\frac{t_{200} + t_{002}}{2} \right) + \ln \left[\frac{\hat{S}_{21}}{R_{21}} \frac{1}{(1 - r_{\text{eff}}^2)} \right]}{-e_2}$$

Figure 4-22 : Atténuation corrigée



Atténuation ($-\alpha$: dBmm^{-1}) en fonction de la fréquence (MHz)

Mesurée (----)

Corrigée (—)

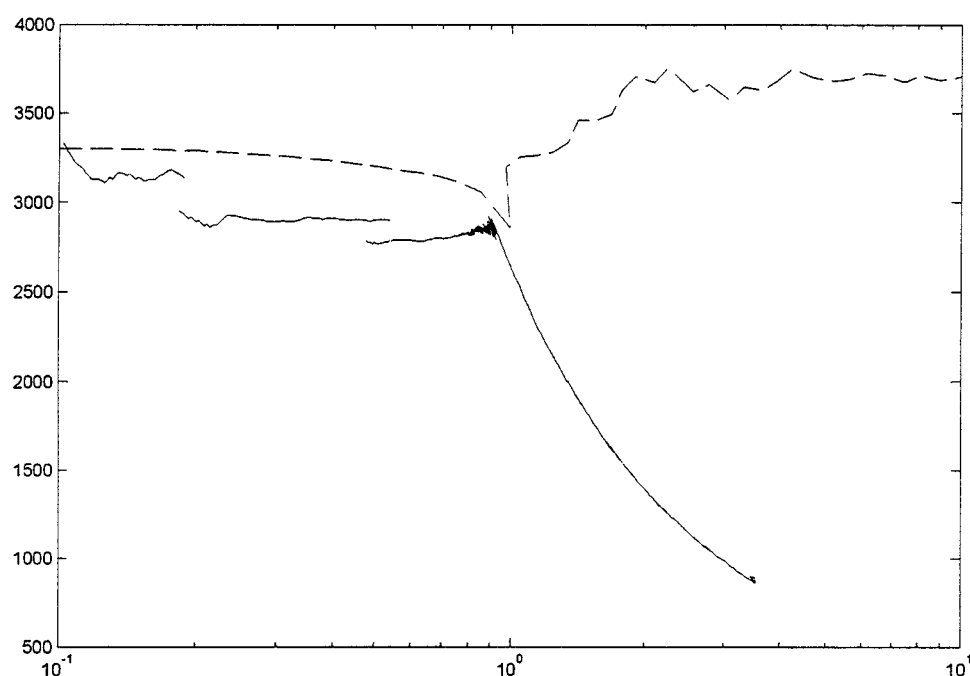
L'écart obtenu sur le calcul de l'atténuation reste minime.

4.08 COMPARAISON AUX MODELES THEORIQUES

4.08-1 MODELE DE WATERMAN ET TRUELL

Nous reprenons les courbes de simulation obtenues par le modèle de Waterman et Truell que nous superposons aux résultats expérimentaux. Nous prenons pour abscisse la fréquence réduite ka , où le nombre d'onde k est calculé à partir de la célérité dans le milieu poreux.

Figure 4-23 : comparaison des célérités mesurées et calculées par le modèle de Waterman et Truell



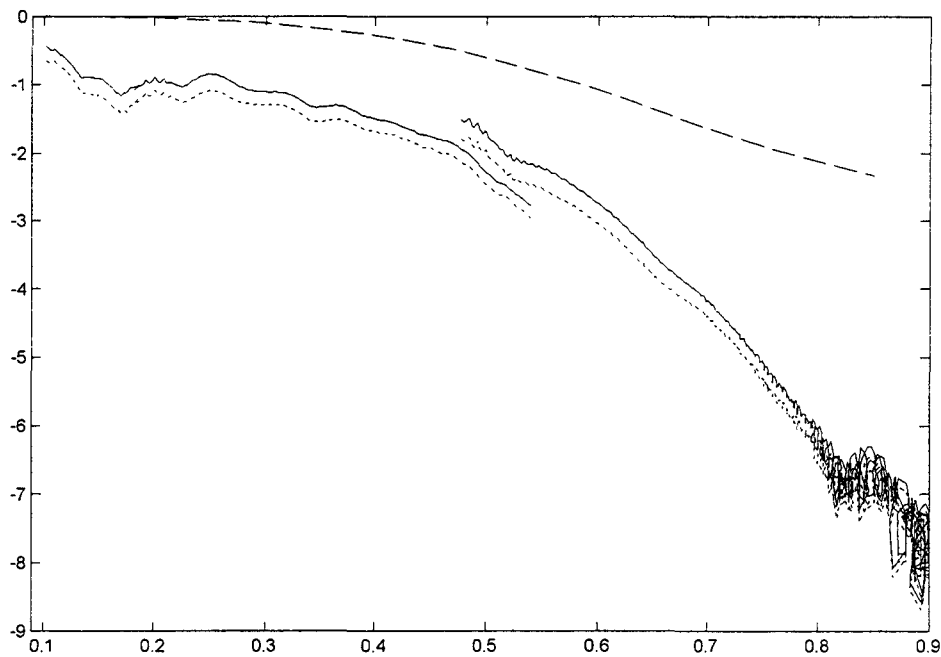
Célérités (m/s) en fonction de la fréquence réduite ka

mesurée (—)

calculée (---)

Nous ne pouvons suivre les évolutions de la célérité pour des fréquences réduites supérieures à l'unité. Pour les fréquences réduites inférieures nous mesurons des célérités pouvant être 350 ms^{-1} inférieures aux valeurs obtenues par simulation. Ces différences ne peuvent être imputées aux relativement mauvais raccordement des sous bandes de mesures, les évaluations des célérités dans les domaines fréquentiel et temporel concordant bien.

Figure 4-24 : comparaison des atténuations mesurées, corrigées, et calculées par le modèle de Waterman et Truell



Atténuations ($-\alpha$: dB/mm) en fonction de la fréquence réduite ka

mesurée (----)

corrigée (—)

calculée (-.-)

Nous obtenons un relativement mauvais accord entre les valeurs de l'atténuation corrigée et les valeurs simulées dans la partie basse fréquence avec environ 1 dB d'écart. Cet écart se creuse en plus haute fréquence.

Nous ne pouvons pas suivre l'évolution de l'atténuation pour une fréquence réduite supérieure à l'unité.

4.08-2 MODELE DE BIOT

La perméabilité du milieu poreux est de l'ordre de 10^{-7} m/s. Cela situe les mesures dans la partie haute fréquence de Biot, pour laquelle le milieu n'est pas dispersif.

Johnson et Plona⁵⁰ ont établi l'expression asymptotique des célérités des ondes de Biot en haute fréquence dans le cas où les modules élastiques de la phase solide et du milieu poreux sont très grand devant ceux de la phase fluide :

$$v_{LR} = \sqrt{\frac{K_m + \frac{4}{3}G_m}{(1-\beta)\rho_s + \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)\beta\rho_f}} \quad (4.08-1)$$

Les mesures présentées se trouvent être hors hypothèse de Biot, la longueur d'onde étant comparable à la taille des pores.

Le milieu apparaissant très peu dispersif sur les mesures de la célérité, nous faisons l'hypothèse que la célérité mesurée se trouve être la valeur asymptotique donnée par le modèle de Biot, ce qui nous permet de déduire les valeurs des constantes élastiques du milieu poreux des mesures de la célérité.

Les célérités moyennes sur les trois sous bande sont 3155m/s, 2904m/s et 2780m/s.

Connaissant la concentration et la tortuosité, nous pouvons calculer la somme

$$K_m + \frac{4}{3}G_m.$$

La connaissance du coefficient de Poisson est nécessaire à l'obtention de K_m et de G_m . Nous recherchons la plus petite valeur du coefficient de Poisson permettant d'obtenir les valeurs de K_m et de G_m dans les bornes de Hashin Shtrikman. Elle est de 0,385. Cette valeur est proche de celle de l'os trabéculaire⁵¹, $P \approx 0,32$. Elle est cependant nettement plus élevée que celle calculée par une méthode d'éléments finis⁵² pour un milieu poreux à pores communicants sphériques, tel que celui que nous utilisons, $P \approx 0,17$.

⁵⁰ Johnson D.L., Plona T.J., 'Acoustic slow waves and the consolidation transition', J.Acoust.Soc.Am. vol 72, pp556-565,1982

⁵¹ Williams J.L., 'Ultrasonic wave propagation in cancellous and cortical bone : prediction of some experimental results by Biot's theory', J.Acoust.Soc.Am. vol 91, pp1106-1112,1992

⁵² Roberts A.P, Garboczi E.J, 'Computation of the linear elastic properties of random porous materials with a wide variety of microstructure', Proc.Royal Society, 458 (2021), pp1033-1054 (2002)

	v (m/s)	K_m (GPa)	G_m (GPa)
P = 0,17	3155	5,0	4,2
	2904	4,2	3,6
	2780	3,9	3,3
P = 0,37	3155	6,9	2,8
	2904	5,8	2,4
	2780	5,3	2,2
P = 0,385	3155	8,0	2,0
	2904	6,8	1,7
	2780	6,2	1,5
Hashin Shtrikman	$6,2 < K_m < 14,4$		$1,0 < G_m < 7,3$

Les valeurs des célérités mesurées ne permettent donc pas l'évaluation des modules K_m et G_m contenues dans les bornes de Hashin et Shtrikman.

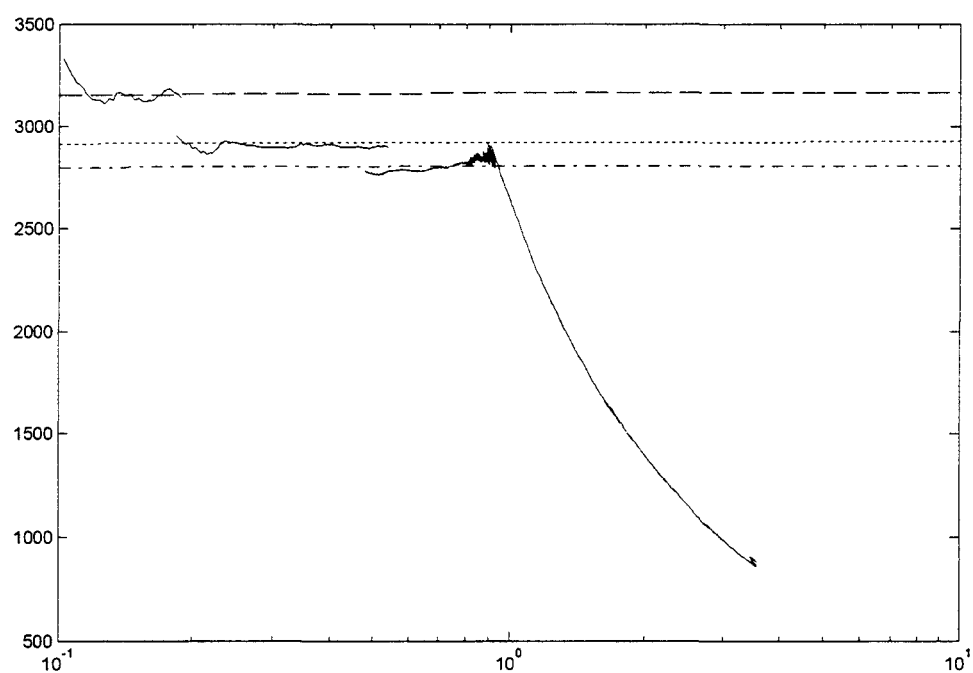
La faiblesse de la technique de traitement, ne prenant en compte ni le caractère hétérogène du milieu, ni le fait qu'il est limité est une nouvelle fois mise en évidence :

Le modèle de Biot décrit un milieu illimité. En pratique, l'onde acoustique se propage dans l'eau et est ensuite transmise au milieu poreux. Il paraît évident que les processus de couplage solide/fluide décrits par Biot dans le milieu poreux s'établissent progressivement au cours de la propagation de l'onde. Ainsi, la célérité de l'onde croît dans le milieu poreux, pour passer de la valeur de la célérité dans l'eau à la valeur asymptotique de la célérité dans le milieu poreux. La valeur mesurée est donc inférieure à la valeur asymptotique

Bien qu'aillant pu expliquer la mise en défaut de l'utilisation d'une technique de caractérisation de milieux homogènes sur des milieux hétérogène, nous ne sommes pas parvenus à modéliser le phénomène qui permettrait de relier la célérité mesurée à la valeur asymptotique donnée par Johnson et Plona.

Les figures 4-25 et 4-26 représentent la superposition des modélisations et des mesures pour une valeur du coefficient de Poisson de 0,2 qui semble être la plus crédible. L'adéquation avec les mesures de célérités est acquise par la méthode de calcul.

Figure 4-25 : comparaison des célérités mesurées et calculées par le modèle de Biot



Célérités (m/s) en fonction de la fréquence réduite ka

mesurée (—)

calculée d'après le modèle de Biot avec :

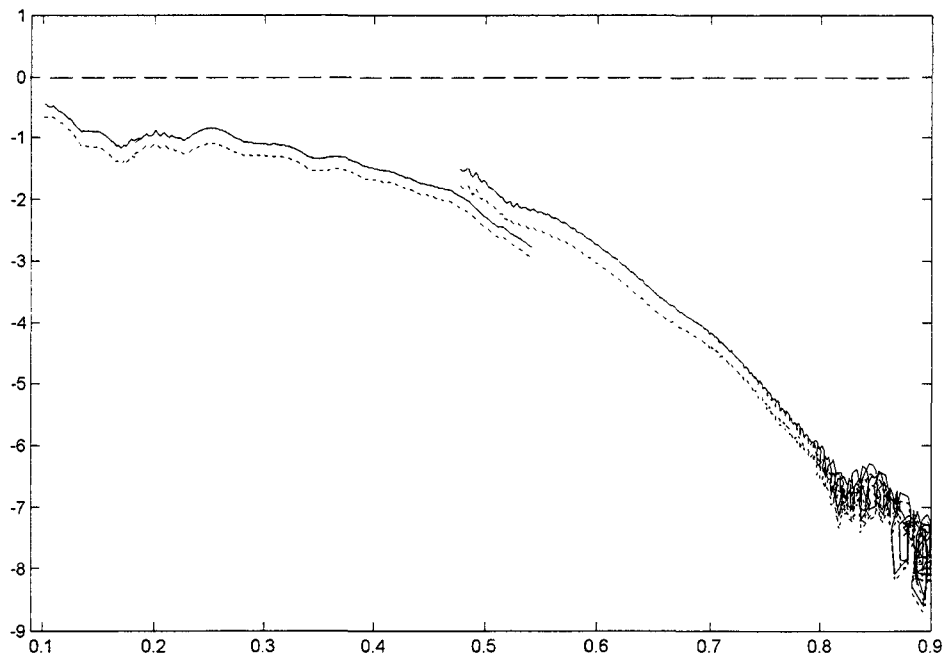
$K = 5,3$ GPa, $G = 4,0$ GPa (---)

$K = 4,5$ GPa, $G = 3,4$ GPa (----)

$K = 4,1$ GPa, $G = 3,1$ GPa (---·)

($P = 0,2$)

Figure 4-26 : comparaison des atténuations mesurées et calculées par le modèle de Biot



Atténuations ($-\alpha$: dB/mm) en fonction de la fréquence réduite ka

mesurée (----)

corrigée (—)

calculée d'après le modèle de Biot avec :

$K = 5,3 \text{ GPa}$, $G = 4,0 \text{ GPa}$ (— · —)

($P = 0,2$)

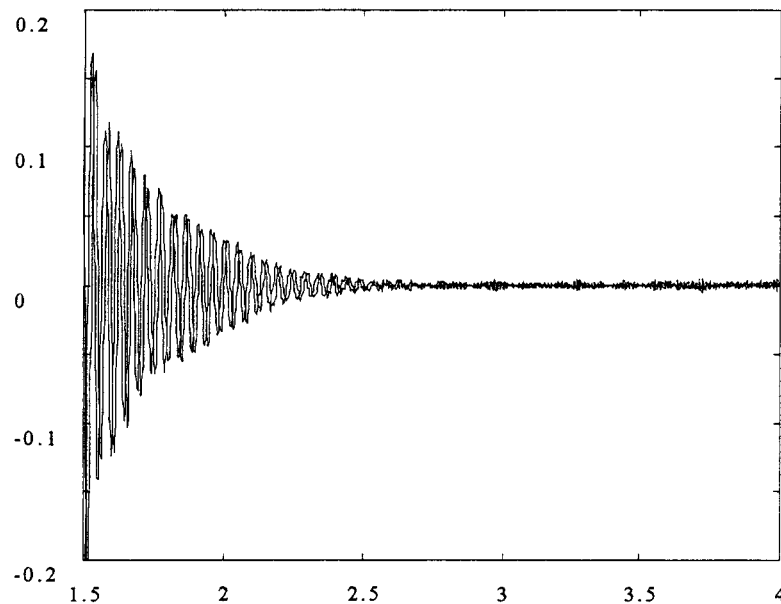
La valeur de l'atténuation donnée par le modèle de Biot est négligeable. Elle correspond bien à l'asymptote basse fréquence observée expérimentalement. Néanmoins, le modèle de Biot ne peut restituer les valeurs mesurées en plus haute fréquence.

4.09 COMPORTEMENT HAUTE FREQUENCE

Nous présentons ici le comportement particulier du paramètre S_{21} pour un diamètre de pore supérieur à la longueur d'onde.

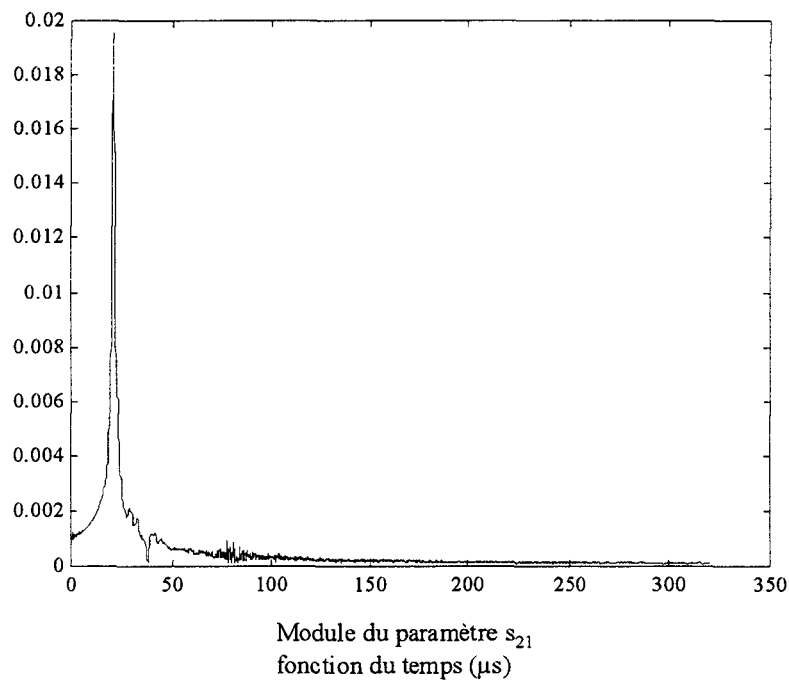
Les allers-retours aux interfaces n'apparaissent plus en raison de la forte atténuation. Il n'est alors plus nécessaire de filtrer le paramètre S_{21} ce qui nous offre la possibilité de l'observer sur la totalité de l'échelle disponible du domaine temporel.

Figure 4-27 : *gamme haute fréquence du paramètre S_{21}*



Paramètre S_{21} égalisé en fonction de la fréquence (MHz)

Nous calculons sa transformée de Fourier inverse.

Figure 4-28 : représentation temporelle du paramètre S_{21} mesuré en haute fréquence

Cette représentation temporelle du paramètre S_{21} nous renseigne peu sur le caractère dispersif du milieu.

Nous présentons sur la figure 4-29 suivante les représentations temporelles du paramètre S_{21} pris sur trois sous bandes de fréquences.

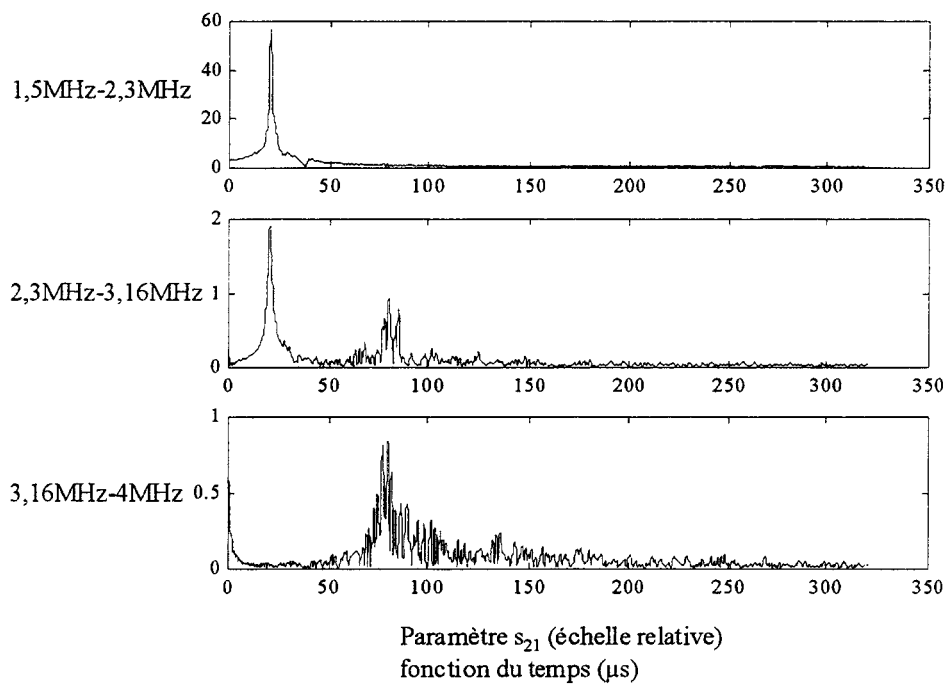
La représentation temporelle du paramètre S_{21} sur la première bande fréquentielle est semblable à celle obtenue en basse fréquence.

Ce n'est pas le cas de la dernière courbe qui fait apparaître un signal inattendu aux environs des 80 μs . Ce signal possède une durée assez importante par rapport à l'impulsion utile et semble être composé d'un grand nombre d'impulsions. Son allure fait penser à un signal réverbéré. L'impulsion utile a disparu, ce qui explique le décrochage de phase déjà relevé sur le paramètre S_{21} , qui rend impossible le calcul de la célérité pour les fréquences supérieures.

La représentation temporelle obtenue sur une bande intermédiaire révèle la transition entre les deux régimes précédents.

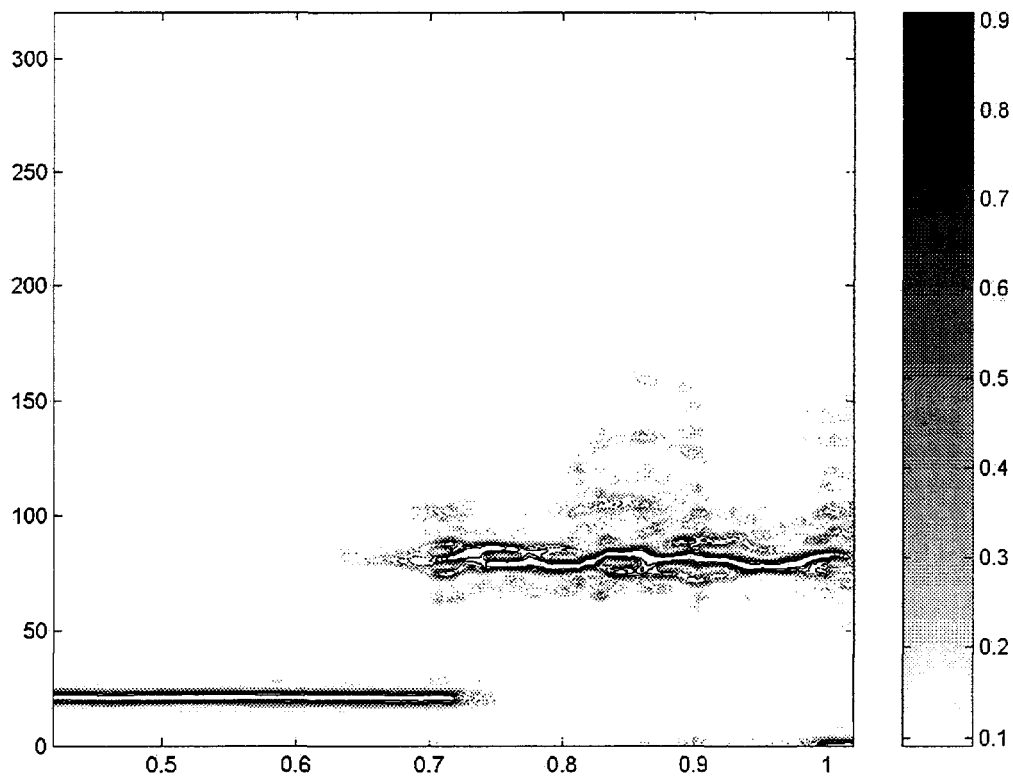
Le niveau du signal réverbéré reste à peu près constant sur les trois sous bandes.

Figure 4-29 : représentation temporelle du paramètre S_{21} mesuré en sous bandes hautes fréquences



Une représentation temps-fréquence classique ne permet pas de mettre en évidence l'apparition de ce signal réverbéré en raison de sa faible amplitude relative. Il sera ébloui par l'impulsion utile. Il est possible de rehausser le niveau du signal réverbéré en multipliant le paramètre S_{21} par $e^{+\alpha(f)e_2}$. Cette modulation d'amplitude modifie légèrement les positions des impulsions. Nous nous contenterons cependant de ce traitement dans la mesure où nous ne lui conférons qu'une utilité qualitative.

Nous effectuons alors une transformée de Fourier inverse à court terme, glissante par pas de 20kHz sur des bandes de 200kHz sur ce paramètre S_{21} modulé en amplitude.

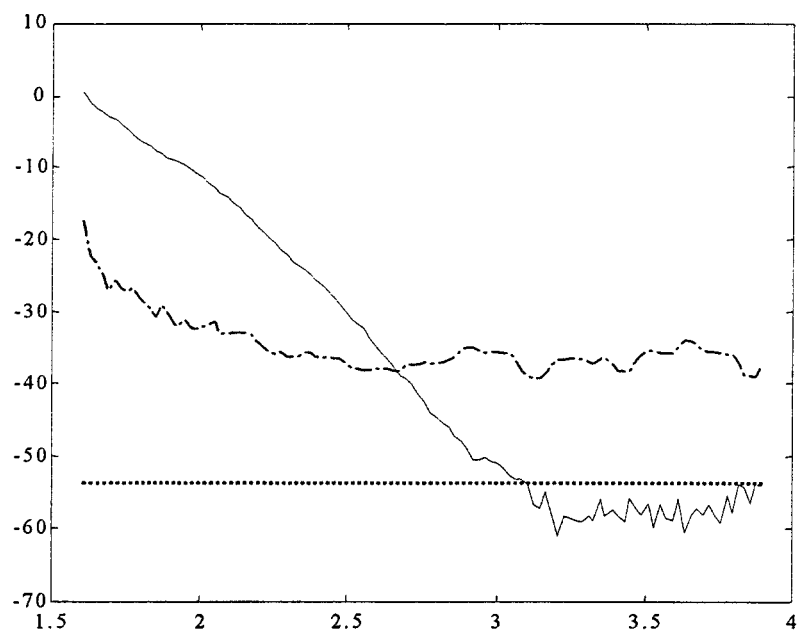
Figure 4-30 : représentation temps fréquence du paramètre S_{21} mesuré en haute fréquence

Représentation temps-fréquence
du paramètre S_{21} modulé en amplitude
abscisse fréquence (MHz)
ordonnée temps (μs)

Le signal réverbéré se manifeste vers 2,75 MHz et semble éclater en un grand nombre de composantes vers 3,4 MHz. Il pourrait être le résultat de résonances internes au matériau. Cependant, nous ne sommes pas parvenus à relever une périodicité liée à une quelconque grandeur géométrique intrinsèque au matériau.

Nous représentons les énergies contenues dans l'impulsion utile et dans le signal réverbéré en fonction de la fréquence, ainsi que celle du bruit supposé uniforme dans le domaine temporel. Ces énergies sont évaluées sur le paramètre S_{21} , comme il a été expliqué dans le paragraphe 4.04-4, avant modulation d'amplitude dans chaque sous bande utilisée dans la représentation temps fréquence.

Figure 4-31 : niveau des différents signaux



Energies (dB) contenues dans l'impulsion utile (—)

et dans le signal réverbéré (-----)

en fonction de la fréquence (MHz)

Niveau de bruit (dB) (.....)

Les énergies contenues dans l'impulsion utile et dans le signal réverbéré décroissent avec la fréquence jusqu'aux environ de 3 MHz. Au delà, l'impulsion utile se noie dans le bruit et l'énergie contenue dans le signal réverbéré se stabilise à un niveau de l'ordre de - 40 dB. Ce niveau supérieur d'une dizaine de décibel au niveau de bruit confère toute sa fiabilité à la représentation temps fréquence.

4.10 COMPARAISON DE DIFFERENTS ECHANTILLONS

Nous reprenons les traitements précédents sur deux nouveaux échantillons. Les diamètres moyens des pores sont de 350 μm et 550 μm . Leur porosité reste voisine de 70 %.

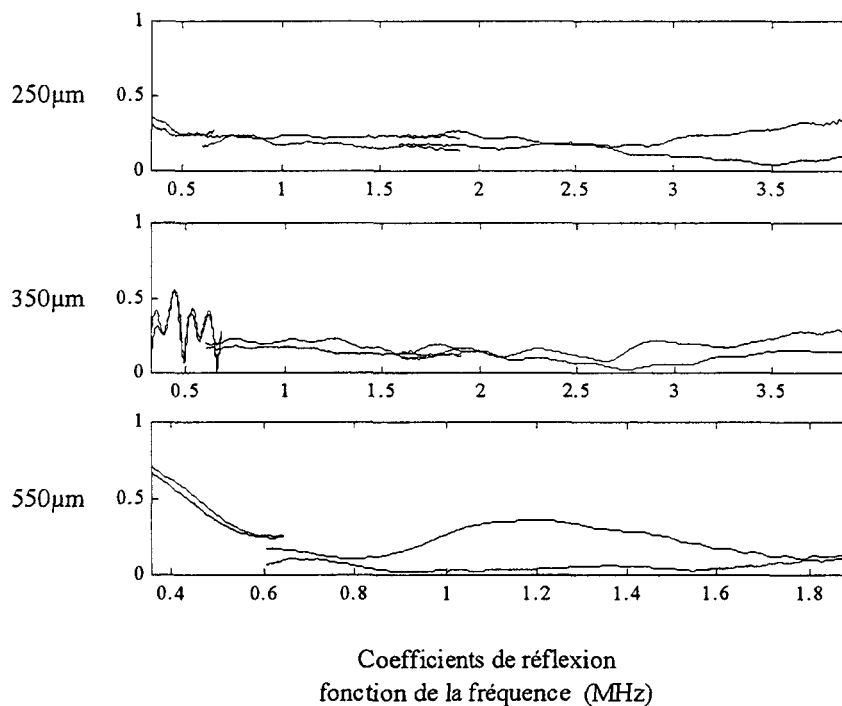
4.10-1 GAMME BASSE FREQUENCE

Les mesures effectuées sur l'échantillon de 550 μm de diamètre de pores à la fréquence centrale de 5 MHz sont dans la zone haute fréquence. Nous ne les reproduisons pas dans ce paragraphe.

4.10-1-a COEFFICIENTS DE REFLEXIONS

La figure 4-32 suivante présente les coefficients de réflexion sur les trois échantillons.

Figure 4-32 : *coefficients de réflexions sur les trois échantillons*

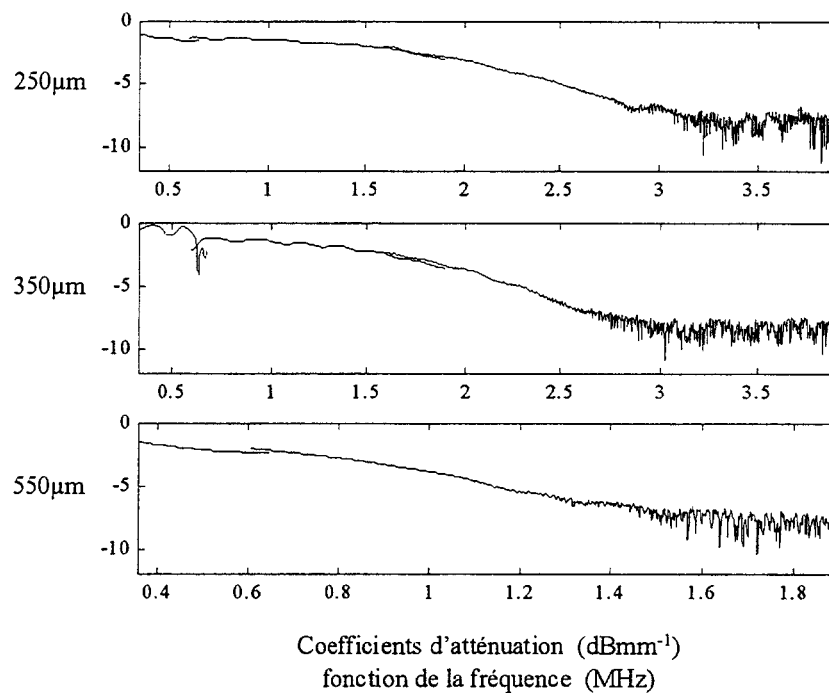


Les raccordements de bandes restent convenables pour les deux premiers échantillons. De forts battements apparaissent pour le second échantillon dans la partie basse fréquence, le filtrage de l'impulsion utile est peu efficace. Le raccordement de bande est moins bon pour le troisième échantillon. D'importantes fluctuations y subsistent sur les deux bandes de mesures utilisables.

4.10-1-b ATTENUATION

La figure 4-34 suivante présente les atténuations dans les trois échantillons.

Figure 4-33 : Atténuation pour les trois échantillons



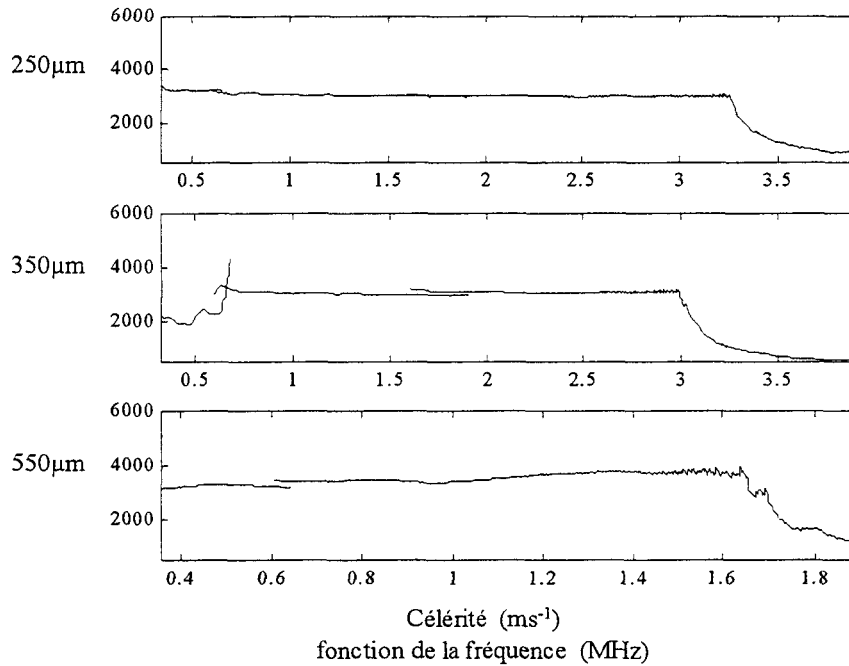
Les raccordements de bandes sont bons pour les trois échantillons. Les battements dans la bande basse fréquence apparaissent pour le second échantillon.

Les atténuations dans les trois milieux poreux évoluent de façon similaire avec la fréquence. Il paraît une forte corrélation entre les positions de ces courbes et le diamètre des pores. Cela pourra être mis à profit pour déduire la taille moyenne des pores des mesures de l'atténuation dans le milieu poreux.

4.10-1-c CELERITE

La figure 4-34 suivante présente les célérités dans les trois échantillons.

Figure 4-34 : célérités dans les trois échantillons



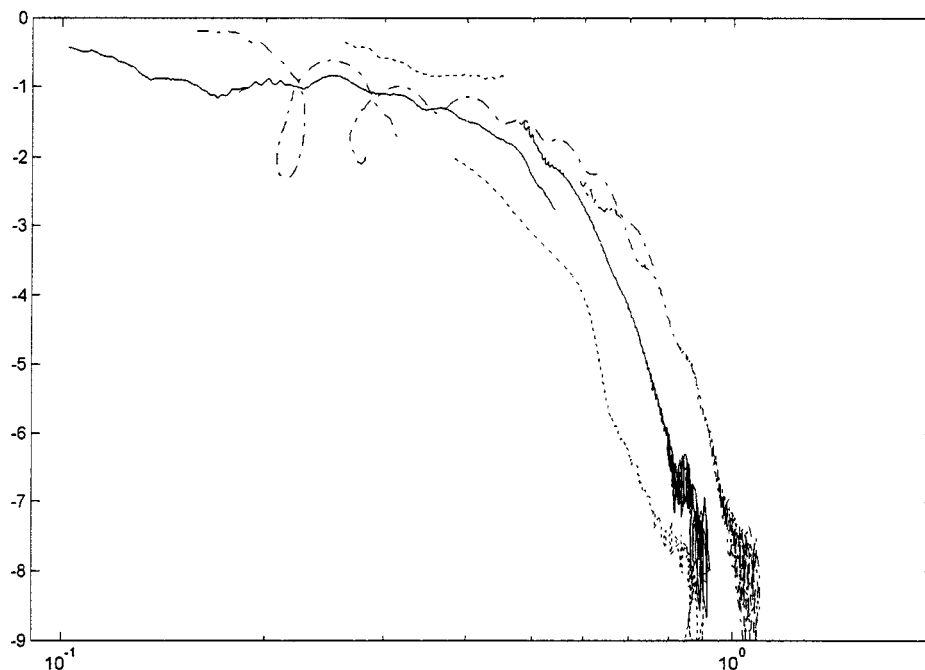
Les raccordements de bandes sont corrects pour les échantillons 1 et 3. Nous avons dû rajouter 2π à la phase du paramètre S_{21} de ce dernier. Le comportement dans la première sous bande de la célérité de l'onde dans le second échantillon n'est pas surprenant, nous avons observé des battements sur les coefficients de réflexion et d'atténuation. La célérité mesurée n'est que peu représentative de celle de l'onde se propageant dans l'échantillon.

Les ondes se propageant dans chacun des trois milieux sont peu dispersives. Les allures des courbes de vitesse sont semblables. La fréquence pour laquelle le décrochage de phase a lieu est fortement corrélé à la taille moyenne des pores. Comme précédemment, cela peut être mis à profit pour déterminer la taille moyenne des pores.

4.10-1-d NORMALISATION PAR LA TAILLE DES PORES

Afin de d'évaluer la cohérence des résultats, nous traçons les coefficients d'atténuation et la célérité en fonction de la fréquence réduite ka , produit du nombre d'onde calculé à partir de la célérité mesurée dans l'échantillon par le rayon moyen des pores. Nous limitons l'étude à la partie basse fréquence.

Figure 4-35 : Atténuations corrigées en fonction de la fréquence réduite



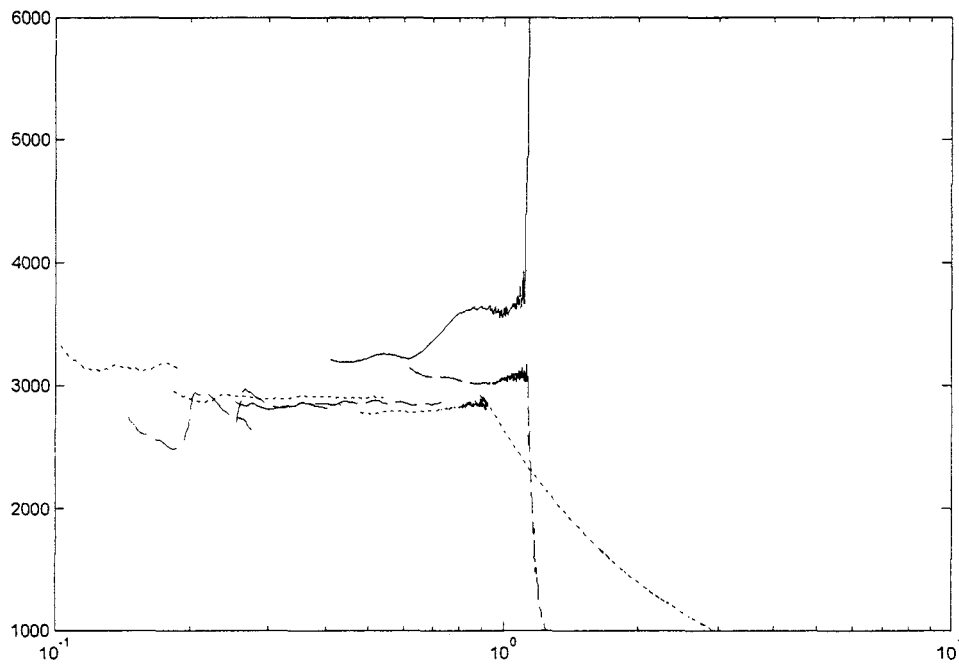
Atténuations corrigées (dB/mm) en fonction de la fréquence réduite ka

diamètre pores $\approx 250 \mu\text{m}$ (—)

diamètre pores $\approx 350 \mu\text{m}$ (- - -)

diamètre pores $\approx 550 \mu\text{m}$ (- - - - -)

Dans les trois cas étudiés, l'atténuation de l'onde dans le milieu poreux augmente rapidement autour de la valeur unité de la fréquence réduite. La mesure de l'atténuation corrigée peut donc permettre une évaluation du diamètre moyen des pores.

Figure 4-36 : *célérités en fonction de la fréquence réduite*

Célérités (m/s) en fonction de la fréquence réduite ka

diamètre pores $\approx 250 \mu\text{m}$ (.....)

diamètre pores $\approx 350 \mu\text{m}$ (---)

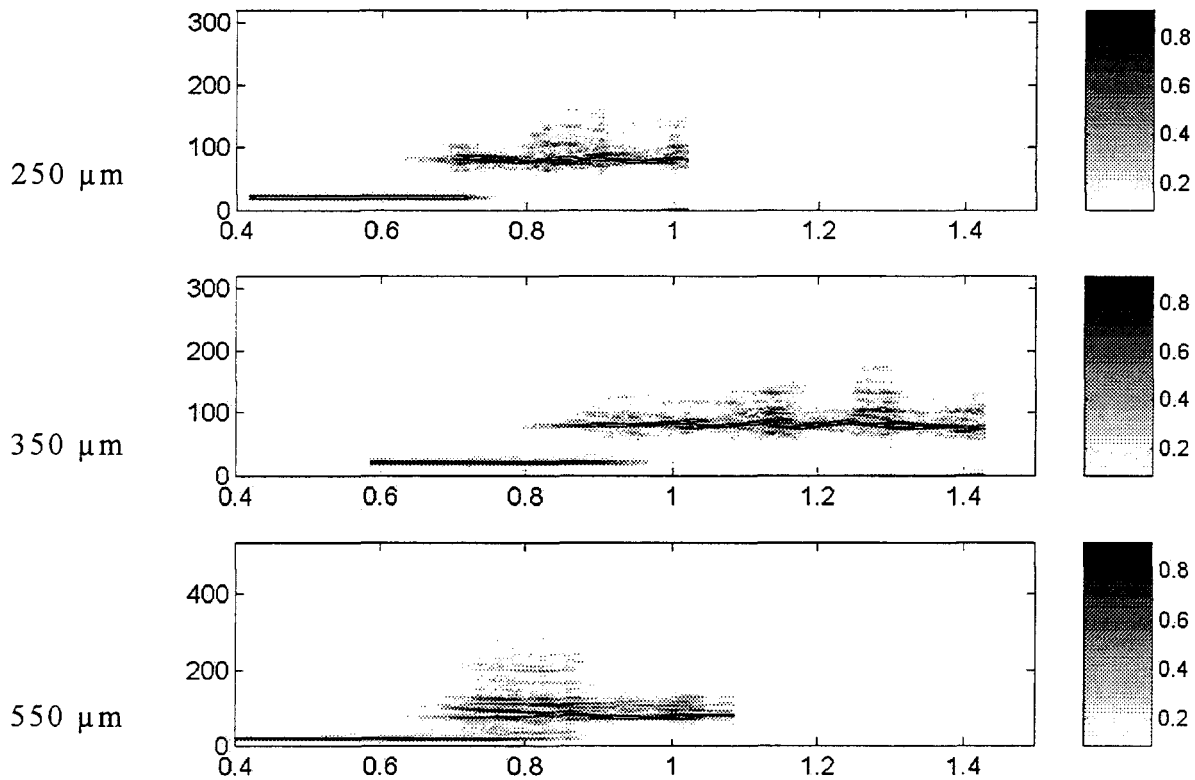
diamètre pores $\approx 550 \mu\text{m}$ (—)

Le décrochage de phase a aussi lieu autour de la valeur unité de la fréquence réduite. Ce qui peut encore être mis à profit pour évaluer la taille moyenne des pores. La célérité dans les trois échantillons est de l'ordre de 3000 ms^{-1} . Il est difficile de différencier les trois milieux par les célérités compte tenu des fortes fluctuations présentes dans nos mesures.

4.10-2 GAMME HAUTE FREQUENCE

Les représentations temps fréquence des trois échantillons, présentées sur la figure 4-37 suivante, se révèlent assez proches. Dans les trois cas le comportement haute fréquence fait apparaître des signaux réverbérés à partir de la fréquence réduite 0,7.

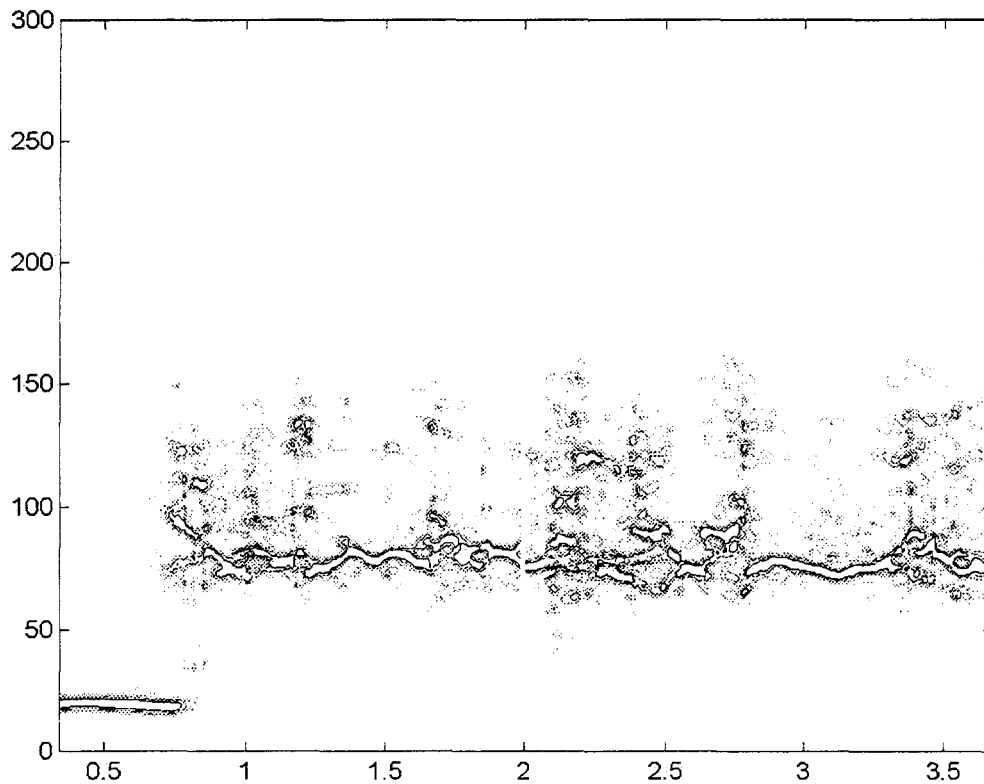
Figure 4-37 : représentation temps-fréquence des trois échantillons



Représentation temps fréquence
abscisse fréquence réduite ka
ordonnée temps (μs)

Nous avons cherché à déterminer l'évolution de ces signaux sur une plus large bande de fréquence. Cherchant un rapport élevé entre la taille des pores et la longueur d'onde, nous avons mené l'étude sur l'échantillon de plus grand diamètre de pore ($\approx 550 \mu\text{m}$).

La figure 4-37 suivante témoigne du fait que le signal réverbéré se poursuit sans modification majeure jusqu'à une fréquence réduite environ égale à quatre.

Figure 4-38 : *analyse temps-fréquence fréquence réduite élevée*

Analyse temps fréquence
diamètre pores 550 μm
abscisse fréquence réduite ka
ordonnée temps μs

4.11 CONCLUSION

De la modélisation des paramètres S du système de mesure nous avons élaboré une technique de traitement du signal permettant le suivi fréquentiel des caractéristiques de propagation d'un milieu homogénéisé.

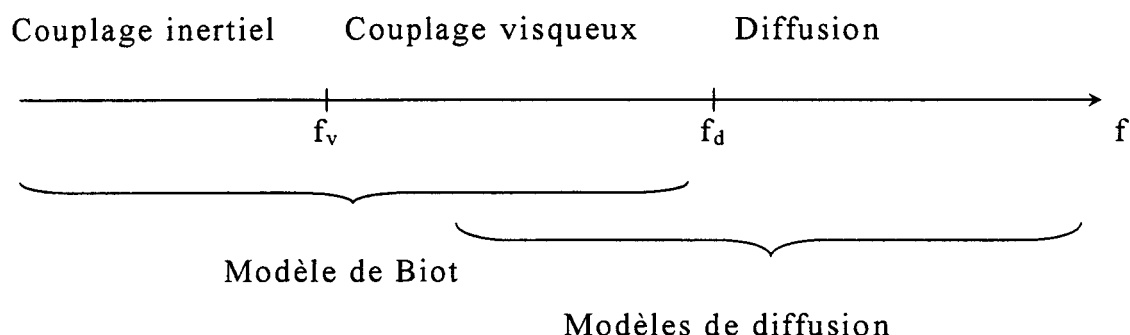
Les mesures effectuées en régime harmonique présentent un excellent rapport signal sur bruit. Néanmoins, la précision des résultats paraît décevante comparée à celles obtenues dans le cas de la caractérisation des milieux homogènes. La mesure pouvant être effectuée sur une dynamique importante, une amélioration de la précision est

attendue en testant des échantillons de plus grande épaisseur. Une part importante des imperfections de la mesure doit en effet être attribuée à la trop faible épaisseur des matériaux qui rend difficile la séparation des signaux. La totalité de la bande des transducteurs ayant été utilisée, une méthode impulsionnelle ne permettrait pas d'obtenir de meilleurs résultats.

Notons que la mesure du coefficient de réflexion se trouve fortement affectée par la nature hétérogène du milieu et par son état de surface, ce qui nous interdit de l'utiliser pour déterminer la masse volumique du milieu. Cela nous a amené à corriger le coefficient d'atténuation de l'onde dans le milieu, cette correction reste néanmoins minime.

Il en est même pour la détermination de la célérité. Nous ne sommes cependant pas parvenus à corriger les valeurs de la célérité mesurée, ce qui rend difficile l'évaluation des constantes élastiques du milieu poreux.

Nous avons relevé deux régimes de propagations distincts pour des fréquences réduites inférieure à 0,7 ou supérieure à 1. Nous en avons déjà fait état dans le schéma 1-16 du chapitre 1.06-2-b que nous rappelons :



Les erreurs apparaissant dans le calcul de la célérité et des coefficients de réflexions et d'atténuation que l'homogénéisation du milieu reste difficile dans la bande de fréquence haute de Biot ($f_v < f < f_d$). Le principal agent homogénéisant un milieu poreux apparaît être le couplage visqueux entre les phases fluide et solide. Ainsi les propriétés effectives ne pourront être bien évaluées que dans la bande basse fréquence de Biot ($f < f_v$).

Notons que les mesures effectuées dans la gamme de fréquence comprise entre f_v et f_d n'ont jamais permis de mettre en évidence les deux ondes longitudinales de Biot. Ceci peut être dû à l'atténuation importante que subissent les ondes longitudinales lentes et à une épaisseur insuffisante de milieu poreux pour séparer ces deux ondes.

Les résultats de simulations montrent qu'il est nécessaire de faire la mesure sur une bande supérieure à 250 kHz dans le cadre du critère de Rayleigh. Les fonctions de transductions apodisent le signal ce qui conduit à un élargissement conséquent de la bande nécessaire à la séparation (500 kHz dans le cas d'une apodisation par fenêtre de Hanning).

Pour les fréquences supérieures, le phénomène de diffusion est prépondérant. Foldy ou Waterman et Truell mettent en évidence la possibilité d'homogénéiser le milieu par moyenne configurationnelle. Nous avons prédit la difficulté de réaliser ce type de moyenne sur un milieu poreux, notamment en raison de l'existence de corrélations entre les positions des pores. Cette prédiction s'avère juste. L'enregistrement puis la moyenne de signaux ayant traversé différentes régions du milieu poreux ne conduit pas à des résultats foncièrement différents de ceux présentés dans le paragraphe 4.09. Les trois milieux poreux testés en haute fréquence ($f > f_d$) font apparaître des signaux réverbérés. Ces signaux sont très probablement dus à des résonances internes. Le relevé de ces résonances internes pourrait permettre une meilleure caractérisation de la micro structure. Nous n'avons cependant pas pu obtenir une forte cohérence entre les temps de vols associés à ces résonances internes et les diamètres des pores des milieux poreux. Ceci est en partie dû à la mauvaise estimation de ces temps de vol, liée à leurs mauvaises séparations, mais aussi très probablement au fait que les fréquences de résonances internes ne soit pas simplement liées à la taille des pores. Une analyse plus complète de la matrice multicentrée T_{MC} présentée dans le paragraphe 1.05-2-b s'avère nécessaire.

La zone de transition entre ces deux régimes de propagation, dans laquelle le coefficient d'atténuation de l'onde augmente de façon très significative, ce qui conduit au décrochage de phase du paramètre S_{21} , permet l'évaluation du rayon moyen a_m des pores par : $a_m = \frac{v}{2\pi f_d}$. La pente de l'évolution fréquentielle du

coefficient d'atténuation dans cette zone de transition est liée à la dispersion de la taille des pores⁵³.

Ainsi, la gamme de fréquence sur laquelle nous avons testé les milieux poreux ne permettant pas l'homogénéisation du milieu, nous parvenons plus facilement à évaluer une caractéristique micro structurale (la taille des pores) qu'effective (les modules élastiques K_m et G_m).

⁵³ Kaelin B., Johnson L.R., 'Dynamic composite elastic medium theory, part 2. Three-dimensional media', J.Appl.Phys. Vol 84, n°10, 15 nov 1998, pp 5458-5468

CONCLUSION GENERALE :

L'accroissement, avec l'augmentation de la durée de vie, du risque de fracture ostéoporotique demande un outil de suivi de l'état du squelette.

La méthode acoustique offre de nombreux avantages. Sans danger pour le patient, et sensible aux caractéristiques mécaniques du milieu, elle devrait se révéler être un outil idéal à la compréhension de ce type de pathologies.

Il nous a paru nécessaire d'effectuer un travail en amont. Il s'inscrit dans le cadre de l'étude des interactions entre tissus osseux et ultrasons. Ce cadre de recherche englobe d'une part la complexité du phénomène de propagation dans les milieux hétérogène, et d'autre part la complexité des milieux vivant.

Nous avons consacré l'essentiel de notre travail à l'étude théorique d'un système de mesure et à sa mise en place pratique. Afin de nous affranchir des difficultés liées à la complexité des milieux vivant, nous avons testé le système expérimental sur des bio-céramiques de substitution osseuse qui sont bien quantifiées en terme d'hétérogénéités.

Dans le premier chapitre, nous avons défini le type de milieu hétérogène que constituent les échantillons testés et présenté quelques modèles de propagations dans les milieux hétérogènes. Nous avons tenu à mettre l'accent sur la complexité des phénomènes entrant en jeu. Deux types de modèles retinrent principalement notre attention, le modèle de Biot, limité en basse fréquence qui met en évidence la propagation de deux ondes longitudinales, et le modèle de Waterman et Truell utilisable sur une gamme arbitraire de fréquence mais qui ne décrit pas un phénomène de propagation guidé par les pores communicants.

Nous avons consacré le second chapitre à l'étude des paramètres S du système de mesure fonctionnant en régime harmonique. Nous sommes parvenus à factoriser les termes relatifs aux phénomènes de transduction électro-acoustique des termes décrivant la propagation. La transformée de Fourier inverse des paramètres S permet de faire le lien avec les méthodes impulsionnelles plus classiques.

Nous avons proposé, dans le troisième chapitre, une technique de traitement du signal permettant d'extraire les paramètres de propagation associés au milieu homogénéisé (coefficient d'atténuation et célérité). Les résultats de simulation sur un

milieu homogène dispersif apparurent très probant en terme de précision. Ils ont en outre montré une bonne robustesse au bruit de mesure dans la gamme de rapport signal à bruit que nous avons obtenu expérimentalement. Ce chapitre fut aussi l'occasion de justifier le choix de la méthode harmonique.

Le quatrième et dernier chapitre nous a permis d'évaluer la technique proposée sur quelques échantillons d'hydroxy apatite poreuse. La méthode harmonique assura un excellent rapport signal à bruit dans la partie basse fréquence. Les mesures indépendantes effectuées avec différentes paires de transducteur ont permis de couvrir une bande de fréquence conséquente. Une bonne cohérence de résultats a été obtenue entre chaque sous bande. Nous avons d'autre part remarqué une bonne adéquation entre les mesures de célérités et les simulations basées sur le modèle de Waterman et Truell.

La dynamique importante du système de mesure fit apparaître un comportement extrêmement intéressant dans la gamme haute fréquence. Nous avons tenté de séparer les impulsions constituant le signal réverbéré. Les algorithmes conçus pour, comme les algorithmes hautes résolutions MUSIC⁵⁴ et ses variantes ne fonctionnèrent pas. Sûrement en raison du trop grand nombre d'impulsion. Une technique plus adaptée utilisant des connaissances à priori sur le signal plus importantes mériterait d'être évalué. Il s'agit de la décomposition du signal transmis dans la base construite sur les éléments de la matrice de diffusion⁵⁵. Bien que daté et pourtant, à notre connaissance, pas encore utilisé, cette décomposition pourrait se révéler pertinente. La méthode présentée dans ce document reste cependant lourde d'utilisation, il est nécessaire de prévoir environ trois heures de manipulation pour tester un échantillon dans une bande de fréquence. Elle constitue néanmoins un outil de compréhension approprié qui apporte une contribution originale à l'étude de la propagation ultrasonore dans les milieux hétérogènes.

⁵⁴ Hasan M.A., Azimi-Sadjadi M.R., Dobeck G.J., '*Separation of multiple time delays using new spectral estimation schemes*', IEEE transactions on signal processing, vol 46, n°6, jun 1998

⁵⁵ Peine.H., Guicking D., '*Acoustical resonance scattering theory for strongly overlapping resonances*', Acta Acustica vol 3, pp 233-241, jun 1995

TABLE DES FIGURES :

Figure 1-1 : influence du paramètre structurel sur les célérités.....	30
Figure 1-2 : influence du paramètre structurel sur les atténuations	31
Figure 1-3 : influence du rapport R/P sur la célérité.....	32
Figure 1-4 : Influence du rapport R/P sur l'atténuation par longueur d'onde	33
Figure 1-5 : Influence du rapport de densité des deux phases sur les célérités.....	34
Figure 1-6 : Influence du rapport de densité des deux phases sur l'atténuation par longueur d'onde	35
Figure 1-7 : Influence du couplage élastique σ_{12} sur les célérités.....	37
Figure 1-8 : Influence du couplage élastique σ_{12} sur le coefficient d'atténuation	38
Figure 1-9 : Influence du couplage inertiel γ_{12} sur les célérités.....	39
Figure 1-10 : Influence du couplage inertiel γ_{12} sur les coefficients d'atténuations	40
Figure 1-11 : célérités des trois ondes de Biot.....	43
Figure 1-12 : Célérités des trois ondes de Biot calculées pour les valeurs moyennes des coefficients élastiques dans les bornes de Hashin et Shtrikman.....	44
Figure 1-13 : Coefficients d'atténuations des trois ondes de Biot.....	45
Figure 1-14 : 1 ^{er} zone de Fresnel autour du diffuseur j dans le cas de la diffusion isotrope	69
Figure 1-15 : célérités et coefficients d'atténuation par le modèle de Waterman et Truell.....	72
Figure 1-16 : classement des différents types de propagation et des modèles correspondants.....	77
Figure 2-1 : schéma générique d'un système de caractérisation en transmission	80
Figure 2-2 : premiers termes de S_{21}^{ac}	107
Figure 2-3 : premiers termes de S_{11}^{ac}	108
Figure 2-4 : impédance acoustique du transducteur récepteur.....	112
Figure 2-5 : impédance acoustique ramenée en surface du transducteur émetteur	113
Figure 2-6 : impédance électrique du transducteur émetteur	114
Figure 2-7 : paramètre S_{11}	115
Figure 2-8 : paramètre S_{21}	116
Figure 3-1 : schéma du signal transmis.....	119
Figure 3-2 : schéma des signaux obtenus en réflexion	120
Figure 3-3 : Niveau reçu en fonction de l'épaisseur de liquide traversé	138
Figure 3-4 : Ecart type sur le niveau en fonction de la largeur de bande en réception.....	139
Figure 3-5 : simulation des paramètres S.....	142
Figure 3-6 : décomposition en composantes 'bas et hauts temps de vols'	143
Figure 3-7 : représentations temporelles des composantes 'hauts temps de vol'	144
Figure 3-8 : paramètres S filtrés	146
Figure 3-9 : lissage polynomial des fonctions de transductions	147

Figure 3-10 : paramètres S égalisés.....	148
Figure 3-11 : coefficients de réflexion	149
Figure 3-12 : Atténuation	150
Figure 3-13 : écart des phases par rapport à leurs régressions linéaires	151
Figure 3-14 : célérités sans à priori	152
Figure 3-15 : agrandissement de la célérité calculée autour de la valeur exacte	153
Figure 3-16 : erreur absolue moyenne sur le coefficient de réflexion	155
Figure 3-17 : erreur absolue moyenne sur le coefficient d'atténuation	155
Figure 3-18 : décrochage de phase	156
Figure 3-19 : erreur absolue moyenne sur la célérité	157
Figure 4-1 : procédé de fabrication des céramiques poreuses	160
Figure 4-2 : schéma du dispositif expérimental.....	161
Figure 4-3 : les 6 paramètres S dans le domaine fréquentiel	165
Figure 4-4 : les 6 paramètres s dans le domaine temporel	166
Figure 4-5 : séparation des composantes à haut et à bas temps de vol	167
Figure 4-6 : impédance électrique des deux transducteurs	168
Figure 4-7 : écart entre les impédances électriques calculées à partir des signaux de référence et de mesure sur le milieu poreux	169
Figure 4-8 : sélection du signal et du bruit de mesure	170
Figure 4-9 : représentation temporelle, gabarit des filtres F_u	171
Figure 4-10 : représentation fréquentielle des paramètres filtrés	173
Figure 4-11 : lissage des fonctions de transduction.....	174
Figure 4-12 : égalisation des paramètres S	175
Figure 4-13 : coefficients de réflexion	177
Figure 4-14 : Atténuation	178
Figure 4-15 : phases déroulées, indétermination levée	179
Figure 4-16 : écarts entre les phases et leurs régressions linéaires	180
Figure 4-17 : célérité	181
Figure 4-18 : coefficients de réflexion sur les deux faces du milieu poreux.....	183
Figure 4-19 : Atténuation	184
Figure 4-20 : célérité	185
Figure 4-21 : erreur sur les coefficients de réflexion.....	186
Figure 4-22 : Atténuation corrigée	187
Figure 4-23 : comparaison des célérités mesurées et calculées par le modèle de Waterman et Truell	188
Figure 4-24 : comparaison des atténuations mesurées, corrigées, et calculées par le modèle de Waterman et Truell.....	189
Figure 4-25 : comparaison des célérités mesurées et calculées par le modèle de Biot.....	191

Figure 4-26 : <i>comparaison des atténuations mesurées et calculées par le modèle de Biot</i>	193
Figure 4-27 : <i>gamme haute fréquence du paramètre S_{21}</i>	194
Figure 4-28 : <i>représentation temporelle du paramètre S_{21} mesuré en haute fréquence</i>	195
Figure 4-29 : <i>représentation temporelle du paramètre S_{21} mesuré en sous bandes hautes fréquences</i>	196
Figure 4-30 : <i>représentation temps fréquence du paramètre S_{21} mesuré en haute fréquence</i>	197
Figure 4-31 : <i>niveau des différents signaux</i>	198
Figure 4-32 : <i>coefficients de réflexions sur les trois échantillons</i>	199
Figure 4-33 : <i>Atténuation pour les trois échantillons</i>	200
Figure 4-34 : <i>célérités dans les trois échantillons</i>	201
Figure 4-35 : <i>Atténuations corrigées en fonction de la fréquence réduite</i>	202
Figure 4-36 : <i>célérités en fonction de la fréquence réduite</i>	203
Figure 4-37 : <i>représentation temps-fréquence des trois échantillons</i>	204
Figure 4-38 : <i>analyse temps-fréquence fréquence réduite élevée</i>	205

ANNEXE 1 : TABLEAU DES RELATIONS ENTRE CONSTANTES ÉLASTIQUES

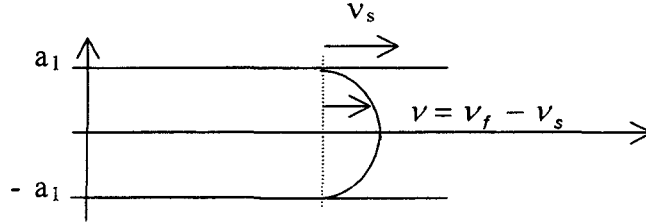
Grandeur calculée : en fonction de :		v_l, v_t	λ, μ	E, P	K, G
vitesse de l'onde transversale	v_t	v_t	$\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$	$\sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1}{2(1+P)}}$	$\sqrt{\frac{G}{\rho}}$
vitesse de l'onde longitudinale	v_l	v_l	$\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$	$\sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1-P}{(1+P)(1-2P)}}$	$\sqrt{\frac{K+\frac{4}{3}G}{\rho}}$
Coefficients de Lamé	μ	ρv_t^2	μ	$\frac{E}{2(1+P)}$	G
	λ	$\rho(v_l^2 - 2v_t^2)$	λ	$\frac{EP}{(1+P)(1-2P)}$	$K - \frac{2}{3}G$
Coefficient de Poisson	P	$\frac{v_l^2 - 2v_t^2}{2(v_l^2 - v_t^2)}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$	P	$\frac{3K - 2G}{2(3K + G)}$
Module de Young	E	$\frac{\rho v_l^2 (3v_l^2 - 4v_t^2)}{v_l - v_t}$	$\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$	E	$\frac{9KG}{3K + G}$
Module de cisaillement	G	ρv_t^2	μ	$\frac{E}{2(1+P)}$	G
Module de compression	K	$\rho \left(v_l^2 - \frac{4}{3}v_t^2 \right)$	$\lambda + \frac{2}{3}\mu$	$\frac{E}{3(1-2P)}$	K

ANNEXE 2 : PARAMETRE STRUCTUREL ET TORTUOSITE

I Introduction du paramètre structurel par Biot :

▪ Ecoulement d'un fluide entre deux parois parallèles

Les deux parois sont soumises à une vibration sinusoïdale de fréquence supérieure à f_c .



La vitesse de déplacement du fluide de viscosité η est représenté par l'équation :

$$\rho_f \frac{\partial v_f}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v_f}{\partial y^2}$$

En introduisant la vitesse relative $v (= v_f - v_s)$ et la force extérieure $X = -\frac{\partial P}{\partial x} - \rho_f \frac{\partial v_s}{\partial t}$, Biot

obtient l'équation : $\frac{\partial v}{\partial t} = X + \frac{\eta}{\rho_f} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ dont la solution, représentant la distribution de vitesse le

long de l'axe y en régime harmonique, s'exprime par :

$$v = \frac{X}{i\omega} \left[1 - \frac{\cosh \left[\left(i \frac{\omega \rho_f}{\eta} \right)^{1/2} y \right]}{\cosh \left[\left(i \frac{\omega \rho_f}{\eta} \right)^{1/2} a \right]} \right]$$

La contrainte de friction en $y = -a_1$, $\tau = \eta \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{y=-a_1}$ et la vitesse moyenne $\langle v \rangle = \int_{-a_1}^{a_1} v dy$ sont

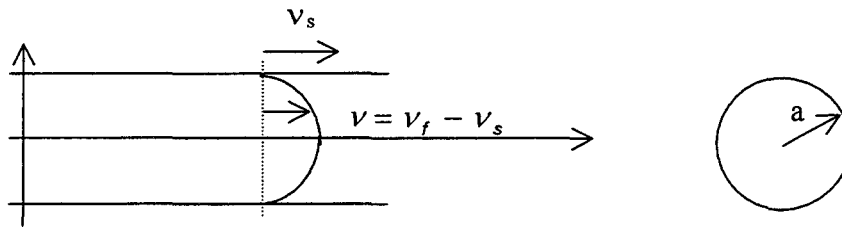
calculés. Biot en déduit le rapport de la force totale 2τ exercée par le fluide sur les parois à la vitesse relative moyenne : $\frac{2\tau}{\langle v \rangle} = \frac{6\eta}{a} F_1(\kappa_1)$, alors que pour un écoulement de Poiseuille

$$\frac{2\tau}{\langle v \rangle} = \frac{6\eta}{a}.$$

Il introduit alors la viscosité dynamique $\tilde{\eta} = \eta F_1(\kappa_1)$ avec $\kappa_1 = a_1 \sqrt{\frac{\omega \rho_f}{\eta}}$ et

$$F_1(\kappa_1) = \frac{1}{3} \frac{\kappa_1 i^{1/2} \tanh(\kappa_1 i^{1/2})}{1 - \frac{1}{i\kappa_1} \tanh(\kappa_1 i^{1/2})}.$$

▪ Cas d'un tube



Biot traite le problème de façon identique et obtient pour ce cas :

$$\frac{2\tau}{\langle v \rangle} = \frac{8\eta}{a} F(\kappa) \quad (1)$$

Alors qu' on obtient $\frac{2\tau}{\langle v \rangle} = \frac{8\eta}{a}$ pour un écoulement de Poiseuille. Il convient alors d'introduire la

viscosité dynamique $\tilde{\eta} = \eta F(\kappa)$ avec $\kappa = a \sqrt{\frac{\omega \rho_f}{\eta}}$, $F(\kappa) = \frac{1}{4} \frac{\kappa T(\kappa)}{1 - \frac{2}{i\kappa} T(\kappa)}$ et

$$T(\kappa) = \frac{\text{ber}'(\kappa) + i \text{bei}'(\kappa)}{\text{ber}(\kappa) + i \text{bei}(\kappa)}.$$

$$\text{ber}(\kappa) + i \text{bei}(\kappa) = J_0\left(i^{3/2} \kappa\right)$$

$$\int_0^\kappa J_0\left(i^{3/2} x\right) x \, dx = -i\kappa [\text{ber}'(\kappa) + i \text{bei}'(\kappa)]$$

▪ viscosité dynamique pour une forme quelconque de pores

Biot remarque que les fonctions $F_1(\kappa_1)$ et $F(\kappa)$ ont des allures proches pour les valeurs élevées de l'argument et notamment que $F_1(\kappa_1) \cong F\left(\frac{4}{3} \kappa_1\right)$. Cela signifie que les viscosités dynamiques du

fluide gorgeant des pores infiniment allongés d'épaisseur a_1 ou des cylindres de rayon $\frac{4}{3} a_1$ sont identiques. Il choisit de représenter la viscosité dynamique par $\tilde{\eta} = \eta F(\kappa)$, avec

$$F(\kappa) = \frac{1}{4} \frac{\kappa T(\kappa)}{1 - \frac{2}{i\kappa} T(\kappa)} \quad \text{et} \quad T(\kappa) = \frac{\text{ber}'(\kappa) + i \text{bei}'(\kappa)}{\text{ber}(\kappa) + i \text{bei}(\kappa)}, \quad \text{ou} \quad \kappa = a \sqrt{\frac{\omega \rho_f}{\eta}}, \quad a \text{ est une grandeur}$$

caractéristique des pores prenant à la fois en compte leurs dimensions et leurs formes.

▪ **Lien entre κ et la fréquence réduite de Biot**

Biot introduit la fréquence caractéristique $f_c = \frac{b}{2\pi\rho_2}$ où b , coefficient de dissipation visqueuse,

peut être défini comme le rapport de la force de friction qu'exerce le fluide sur les parois solides par unité de vitesse relative moyenne et par unité de volume de fluide.

D'autre part, une fréquence caractéristique f'_c peut être attribuée à la grandeur sans dimension κ :

$f'_c = \frac{\eta}{2\pi\rho_f a^2}$. Qui permet d'écrire $\kappa^2 = \frac{f}{f'_c}$. Biot recherche le lien existant entre ces deux

fréquences caractéristiques.

Pour des pores cylindriques, l'équation 1 permet d'exprimer la force de friction totale par unité de vitesse relative moyenne : $\frac{2\pi a \tau}{\langle v \rangle} = 8\pi\eta$. On obtient alors pour la fraction volumique β de fluide :

$$b = \frac{8\eta\beta}{a^2}. \text{ D'où } f_c = \frac{b}{2\pi\beta\rho_f} = 8f'_c.$$

$$\text{Ainsi } \kappa^2 = \frac{f}{f'_c} = 8 \frac{f}{f_c}.$$

▪ **application aux matériaux poreux**

Pour rendre compte que les matériaux poreux ne sont en général pas formés de pores uniformes, tous parallèles à un même axe, Biot introduit le paramètre structurel δ tel que $\kappa^2 = \delta^2 \frac{f}{f_c}$. La viscosité

$$\text{dynamique d'un tel milieu s'exprime alors par } \tilde{\eta} = \eta F \left[\delta \left(\frac{f}{f_c} \right)^{1/2} \right].$$

Ce paramètre décrit à la fois la dimension des pores, leur forme et leur orientation. Ainsi Biot obtient pour différentes orientations de pores cylindriques, $8 < \delta^2 < 12$ et pour différentes orientations de pores infiniment allongés, $\frac{16}{3} < \delta^2 < 8$. Les simulations sont donc conduites avec

$$\delta^2 = 8.$$

II Tortuosité du matériau :

Il est extrêmement fréquent de voir apparaître la tortuosité du matériau dans les termes de pertes.

Reprenant l'une des équations du paragraphe 1.01-2-a :

$$\Delta(Pe^s + Qe^f) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11}e^s + \rho_{12}e^f) + bF(\kappa) \frac{\partial}{\partial t} (e^s - e^f)$$

que nous pouvons dans le cas du régime harmonique, mettre sous la forme :

$$\Delta(Pe^s + Qe^f) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11}e^s + \rho_{12}e^f) + \frac{bF(\kappa)}{i\omega} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (e^s - e^f)$$

de l'expression du coefficient de couplage inertiel, paragraphe 1.01-1-c, nous tirons :

$$\rho_{12} = -(\zeta - 1) \beta \rho_f$$

Nous obtenons :

$$\Delta(Pe^s + Qe^f) = (1 - \beta) \rho_s \frac{\partial^2 e^s}{\partial t^2} - \left[\rho_{12} + \frac{i b F(\kappa)}{\omega} \right] \frac{\partial^2}{\partial t^2} (e^s - e^f)$$

On peut alors définir un coefficient de couplage inertiel dynamique :

$$\tilde{\rho}_{12} = \rho_{12} + \frac{i b F(\kappa)}{\omega}$$

une tortuosité dynamique :

$$\tilde{\rho}_{12} = -(\tilde{\zeta} - 1) \beta \rho_f \Rightarrow \tilde{\zeta} = \zeta + \frac{i b F(\kappa)}{\omega \beta \rho_f}$$

ou un coefficient de perméabilité dynamique :

$$\tilde{p}_{em} = \frac{i \eta \beta}{\tilde{\zeta} \omega \rho_f}$$

ANNEXE 3 : VECTEURS DEPLACEMENTS

Les vecteurs déplacements sont définis par les expressions suivantes dans le système de coordonnées sphériques :

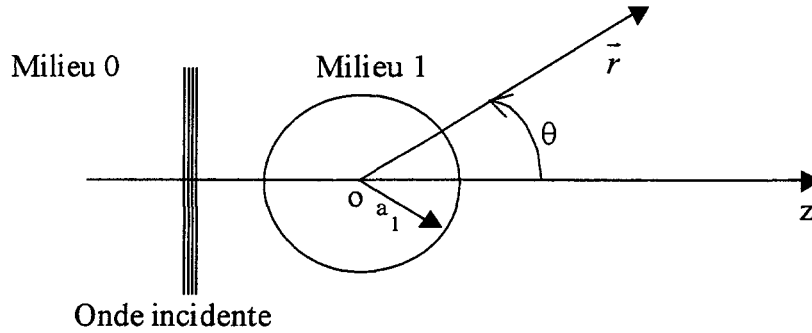
$$\vec{l}_{mn}^{(1/3)} = \vec{\nabla} \Phi_{nm} = \begin{vmatrix} \frac{d[f_n(k_L r)]}{dr} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \\ f_n(k_L r) \frac{1}{r} \frac{d[P_n^m(\cos \theta)]}{d\theta} e^{im\varphi} \\ \frac{im}{r \sin \theta} f_n(k_L r) P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \end{vmatrix}$$

$$\vec{m}_{mn}^{(1/3)} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{r} \Psi_{nm}) = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{im}{r \sin \theta} f_n(k_T r) P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \\ -f_n(k_T r) \frac{1}{r} \frac{d[P_n^m(\cos \theta)]}{d\theta} e^{im\varphi} \end{vmatrix}$$

et

$$\vec{n}_{mn}^{(1/3)} = \frac{1}{k} \vec{\nabla} \wedge [\vec{\nabla} \wedge (\vec{r} \Psi_{nm})] = \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{r} f_n(k_T r) P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \\ \frac{1}{r} \frac{d[r f_n(k_T r)]}{dr} \frac{d[P_n^m(\cos \theta)]}{d\theta} e^{im\varphi} \\ \frac{im}{r \sin \theta} \frac{d[r f_n(k_T r)]}{dr} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \end{vmatrix}$$

Les exposants (1) ou (3) apparaissant dans les vecteurs déplacements signifient que nous utiliserons pour f_n , des fonctions de Bessel ou de Hankel sphériques. La présence ou pas d'une singularité à l'origine guidera ce choix.

ANNEXE 4 : MATRICE DE DIFFUSION

L'onde plane incidente est décomposée en harmoniques sphériques :

$$\vec{u}^{inc} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \vec{u}_{nm}^{inc} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{nm}^{inc} \vec{l}_{nm}^{(1)} + B_{nm}^{inc} \vec{m}_{nm}^{(1)} + C_{nm}^{inc} \vec{n}_{nm}^{(1)}$$

avec

$$A_{nm}^{inc} = \frac{1}{ih} i^n (2n+1) \delta_{m,0}, \quad B_{nm}^{inc} = \frac{1}{2i} i^n \frac{(2n+1)}{n(n+1)} [\delta_{m,1} + n(n+1) \delta_{m,-1}] \text{ et}$$

$$C_{nm}^{inc} = \frac{1}{2ik} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [\delta_{m,1} - n(n+1) \delta_{m,-1}]$$

Il apparaît une onde diffusée par l'hétérogénéité :

$$\vec{u}^{diff} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \vec{u}_{nm}^{diff} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{nm}^{diff} \vec{l}_{nm}^{(3)} + B_{nm}^{diff} \vec{m}_{nm}^{(3)} + C_{nm}^{diff} \vec{n}_{nm}^{(3)}$$

Et une onde transmise à la sphère :

$$\vec{u}^{int} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \vec{u}_{nm}^{int} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{nm}^{int} \vec{l}_{nm}^{(1)} + B_{nm}^{int} \vec{m}_{nm}^{(1)} + C_{nm}^{int} \vec{n}_{nm}^{(1)}$$

La résolution des équations de continuités à la surface de l'inclusion nous amène aux systèmes d'équations suivant :

- pour une onde incidente purement longitudinale :

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n^{\text{diff/inc.long.}} \\ B_n^{\text{diff/inc.long.}} \\ A_n^{\text{int/inc.long.}} \\ B_n^{\text{int/inc.long.}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Re g(d_{11}) \\ \Re g(d_{21}) \\ \Re g(d_{31}) \\ \Re g(d_{41}) \end{bmatrix}$$

$\Re g$ signifiant la parte régulière : $\Re g[h_n(ka)] = j_n(ka)$

- pour une onde incidente purement transversale :

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n^{\text{diff/inc.trans.}} \\ B_n^{\text{diff/inc.trans.}} \\ A_n^{\text{int/inc.trans.}} \\ B_n^{\text{int/inc.trans.}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Re g(d_{12}) \\ \Re g(d_{22}) \\ \Re g(d_{32}) \\ \Re g(d_{42}) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} d_{55} & d_{56} \\ d_{65} & d_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_n^{\text{diff/inc.trans.}} \\ C_n^{\text{int/inc.trans.}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Re g(d_{55}) \\ \Re g(d_{65}) \end{bmatrix}$$

Les éléments de matrices d_{ij} sont donnés dans le tableau suivant :

d_{11}	$x_{L0} h_n'(x_{L0})$
d_{12}	$n(n+1) h_n(x_{T0})$
d_{13}	$-x_{L1} j_n'(x_{L1})$
d_{14}	$-n(n+1) j_n(x_{T1})$
d_{21}	$h_n(x_{L0})$
d_{22}	$x_{T0} h_n'(x_{T0}) + h_n(x_{T0})$
d_{23}	$-j_n(x_{L1})$
d_{24}	$-x_{T1} j_n'(x_{T1}) - j_n(x_{T1})$
d_{31}	$[2n(n+1) - x_{T0}^2] h_n(x_{L0}) - 4x_{L0} h_n'(x_{L0})$
d_{32}	$2n(n+1) [x_{T0} h_n'(x_{T0}) - h_n(x_{T0})]$
d_{33}	$-(\rho_1/\rho_0) (x_{T0}/x_{T1})^2 \{ [2n(n+1) - x_{T1}^2] j_n(x_{L1}) - 4x_{L1} j_n'(x_{L1}) \}$
d_{34}	$-2n(n+1) (\rho_1/\rho_0) (x_{T0}/x_{T1})^2 [x_{T1} j_n'(x_{T1}) - j_n(x_{T1})]$
d_{41}	$x_{L0} h_n'(x_{L0}) - h_n(x_{L0})$
d_{42}	$[n(n+1) - \frac{1}{2} x_{T0}^2 - 1] h_n(x_{T0}) - x_{T0} h_n'(x_{T0})$
d_{43}	$-(\rho_1/\rho_0) (x_{T0}/x_{T2})^2 [x_{L1} j_n'(x_{L1}) - j_n(x_{L1})]$
d_{44}	$-(\rho_1/\rho_0) (x_{T0}/x_{T1})^2 \{ [n(n+1) - \frac{1}{2} x_{T1}^2 - 1] j_n(x_{T1}) - x_{T1} j_n'(x_{T1}) \}$
d_{55}	$x_{T0} h_n(x_{T0})$
d_{56}	$-x_{T0} j_n(x_{T1})$
d_{65}	$x_{T0} h_n'(x_{T0}) - h_n(x_{T0})$
d_{66}	$-(\rho_1/\rho_0) (x_{T0}/x_{T2})^2 [x_{T1} j_n'(x_{T1}) - j_n(x_{T1})]$

avec $x_{L0} = k_{L0} a_1$, $x_{T0} = k_{T0} a_1$, $x_{L1} = k_{L1} a_1$ et $x_{T1} = k_{T1} a_1$

Matrice de diffusion

Les coefficients de décomposition harmonique des ondes diffusées sont obtenus par la résolution des équations précédentes en utilisant la méthode de Cramer.

Par exemple :

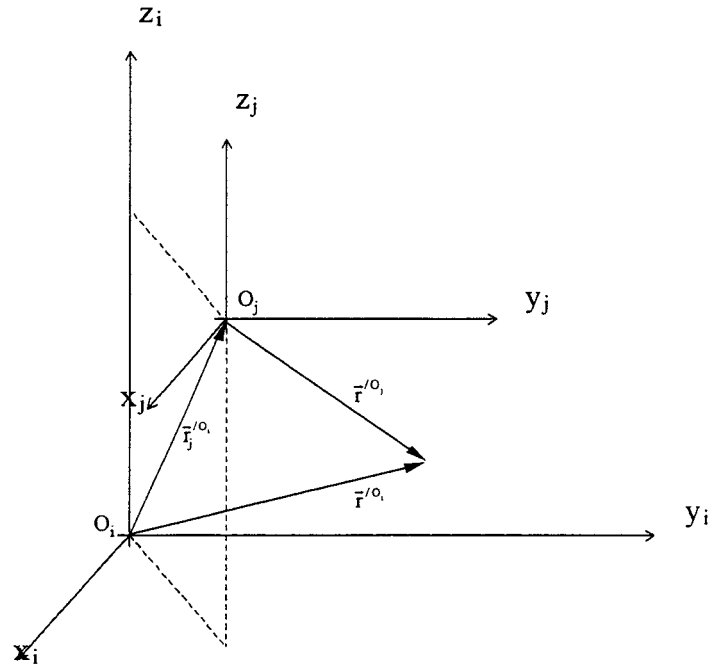
$$A_n^{\text{diff/inc.long.}} = \frac{D_n^{[1]}}{D_n^{[2]}} \text{ avec } D_n^{[1]} = \det \begin{vmatrix} -\Re g(d_{11}) & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ -\Re g(d_{21}) & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ -\Re g(d_{31}) & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ -\Re g(d_{41}) & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{vmatrix} \text{ et } D_n^{[2]} = \det \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{vmatrix}.$$

La relation de passage entre les coefficients des décompositions harmoniques des ondes incidentes et diffusées peut s'exprimer par :

$$\begin{vmatrix} A_{nm}^{\text{diff}} \\ B_{nm}^{\text{diff}} \\ C_{nm}^{\text{diff}} \end{vmatrix} = T_n \begin{vmatrix} A_{nm}^{\text{inc}} \\ B_{nm}^{\text{inc}} \\ C_{nm}^{\text{inc}} \end{vmatrix} \text{ avec } T_n = \begin{vmatrix} T_n^{\text{ll}} & T_n^{\text{lt}} & 0 \\ T_n^{\text{tl}} & T_n^{\text{tt}} & 0 \\ 0 & 0 & T_n^{\text{ss}} \end{vmatrix}$$

où $T_n^{\text{ll}} = A_n^{\text{diff/inc.long.}}$, $T_n^{\text{lt}} = A_n^{\text{diff/inc.trans.}}$, $T_n^{\text{tl}} = B_n^{\text{diff/inc.long.}}$, $T_n^{\text{tt}} = B_n^{\text{diff/inc.trans.}}$ et $T_n^{\text{ss}} = C_n^{\text{diff/inc.trans.}}$.

ANNEXE 5 : TRANSLATION DES VECTEURS DÉPLACEMENTS



Nous notons dans la base centrée sur O_j les déplacements en $\vec{r}^{(3)}/O_j$ associés :

✓ à l'onde diffusée par l'inclusion placée en $\vec{r}_j$, par :

$$\vec{u}_j^{(\text{diff}/O_j)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \vec{u}_{jnm}^{(\text{diff}/O_j)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{jnm}^{\text{diff}} \vec{l}_{jnm}^{(3)} + B_{jnm}^{\text{diff}} \vec{m}_{jnm}^{(3)} + C_{jnm}^{\text{diff}} \vec{n}_{jnm}^{(3)}$$

✓ à l'onde plane incidente en $\vec{r}_j$, par :

$$\vec{u}^{(\text{inc}/O_j)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \vec{u}_{jnm}^{(\text{inc}/O_j)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{jnm}^{\text{inc}} \vec{l}_{jnm}^{(1)} + B_{jnm}^{\text{inc}} \vec{m}_{jnm}^{(1)} + C_{jnm}^{\text{inc}} \vec{n}_{jnm}^{(1)}$$

Les premiers indices j apparaissant dans les coefficients $A_{j..}$, $B_{j..}$ et $C_{j..}$ ou dans les déplacements $\vec{u}_j^{(3)}$ identifient l'inclusion (placée en $\vec{r}_j$), les deux autres identifient le mode (n, m) . De même, le premier indice j apparaissant dans les vecteurs $\vec{l}_{jnm}$, $\vec{m}_{jnm}$ et $\vec{n}_{jnm}$ identifient la base de travail (centrée sur O_j), les deux autres identifient le mode (n, m) . Les coefficients A_{jnm}^{inc} , B_{jnm}^{inc} et C_{jnm}^{inc} s'expriment en fonction des coefficients A_{nm}^{inc} , B_{nm}^{inc} et C_{nm}^{inc} introduits en annexe 4 par $A_{jnm}^{\text{inc}} = A_{nm}^{\text{inc}} e^{-ik_L o z_j}$, $B_{jnm}^{\text{inc}} = B_{nm}^{\text{inc}} e^{-ik_T o z_j}$ et $C_{jnm}^{\text{inc}} = C_{nm}^{\text{inc}} e^{-ik_T o z_j}$.

Translation des vecteurs déplacements

Le déplacement associé à l'onde diffusée par l'inclusion placée en $\vec{r}_j$ s'exprime par :

$$\vec{u}_j^{\text{diff}}(\vec{r}_j) = T_j \left[\vec{u}^{\text{inc}}(\vec{r}_j) + \sum_{i \neq j}^N \vec{u}_i^{\text{diff}}(\vec{r}_j) \right]$$

Il est nécessaire d'exprimer les déplacements associés à toutes les ondes dans la base sphérique centrée sur O_j . Nous utilisons les expressions de translations des vecteurs déplacements :

$$\begin{aligned} \vec{l}_{\text{inn}}^{(3)} &= \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v A_{v\mu}^{\text{nm}}(\vec{r}_j/O_i) \vec{l}_{jv\mu}^{(1)} \\ \vec{m}_{\text{inn}}^{(3)} &= \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v B_{v\mu}^{\text{nm}}(\vec{r}_j/O_i) \vec{m}_{jv\mu}^{(1)} + C_{v\mu}^{\text{nm}}(\vec{r}_j/O_i) \vec{n}_{jv\mu}^{(1)} \\ \vec{n}_{\text{inn}}^{(3)} &= \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v C_{v\mu}^{\text{nm}}(\vec{r}_j/O_i) \vec{m}_{jv\mu}^{(1)} + B_{v\mu}^{\text{nm}}(\vec{r}_j/O_i) \vec{n}_{jv\mu}^{(1)} \end{aligned}$$

Ainsi pour le vecteur déplacement associé à l'onde diffusée par l'inclusion placée $\vec{r}_i$ et exprimé dans la base centrée sur O_i :

$$\vec{u}_{\text{inn}}^{(\text{diff}/O_i)} = A_{\text{inn}}^{\text{diff}} \vec{l}_{\text{inn}}^{(3)} + B_{\text{inn}}^{\text{diff}} \vec{m}_{\text{inn}}^{(3)} + C_{\text{inn}}^{\text{diff}} \vec{n}_{\text{inn}}^{(3)}$$

Et pour le déplacement associé à la même onde mais exprimé dans la base centrée sur O_j :

$$\begin{aligned} \vec{u}_{\text{inn}}^{(\text{diff}/O_j)} &= A_{\text{inn}}^{\text{diff}} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v A_{v\mu}^{\text{nm}}(\vec{r}_j/O_i) \vec{l}_{jv\mu}^{(1)} \\ &+ B_{\text{inn}}^{\text{diff}} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v B_{v\mu}^{\text{nm}}(\vec{r}_j/O_i) \vec{m}_{jv\mu}^{(1)} + C_{v\mu}^{\text{nm}}(\vec{r}_j/O_i) \vec{n}_{jv\mu}^{(1)} \\ &+ C_{\text{inn}}^{\text{diff}} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v C_{v\mu}^{\text{nm}}(\vec{r}_j/O_i) \vec{m}_{jv\mu}^{(1)} + B_{v\mu}^{\text{nm}}(\vec{r}_j/O_i) \vec{n}_{jv\mu}^{(1)} \end{aligned}$$

Afin d'identifier les mêmes harmoniques, représentés par les vecteurs $\vec{l}$, $\vec{m}$ et $\vec{n}$ nous permutons les indices n, v et m, μ et identifions l'expression précédente avec l'expression générique d'un vecteur déplacement exprimé dans la base centrée sur O_j . La translation des coefficients des décompositions harmoniques peut alors s'exprimer par la relation matricielle :

$$\begin{bmatrix} A_{\text{inn}}^{\text{diff}} \\ B_{\text{inn}}^{\text{diff}} \\ C_{\text{inn}}^{\text{diff}} \end{bmatrix}_{/O_j} = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v S_{v\mu}^{\text{nm}}(\vec{r}_j/O_i) \begin{bmatrix} A_{\text{iv}\mu}^{\text{diff}} \\ B_{\text{iv}\mu}^{\text{diff}} \\ C_{\text{iv}\mu}^{\text{diff}} \end{bmatrix}_{/O_i} \quad \text{avec :}$$

$$S_{nm}^{\nu\mu}(\vec{r}_j^{/O_i}) = \begin{vmatrix} A_{nm}^{\nu\mu}(\vec{r}_j^{/O_i}) & 0 & 0 \\ 0 & B_{nm}^{\nu\mu}(\vec{r}_j^{/O_i}) & C_{nm}^{\nu\mu}(\vec{r}_j^{/O_i}) \\ 0 & C_{nm}^{\nu\mu}(\vec{r}_j^{/O_i}) & B_{nm}^{\nu\mu}(\vec{r}_j^{/O_i}) \end{vmatrix}$$

Les coefficients $A_{nm}^{\nu\mu}$, $B_{nm}^{\nu\mu}$ et $C_{nm}^{\nu\mu}$ s'expriment par :

$$A_{nm}^{\nu\mu}(\vec{r}_j^{/O_i}) = \sum_p (-1)^\mu i^{\nu+p-n} (2\nu+1) a(m, n | -\mu, \nu | p) \psi_{p, m-\mu}^{(3)}(\vec{r}_j^{/O_i})$$

$$B_{nm}^{\nu\mu}(\vec{r}_j^{/O_i}) = \sum_p (-1)^\mu i^{\nu+p-n} a(n, \nu, p) a(m, n | -\mu, \nu | p) \psi_{p, m-\mu}^{(3)}(\vec{r}_j^{/O_i})$$

$$C_{nm}^{\nu\mu}(\vec{r}_j^{/O_i}) = \sum_p (-1)^{\mu+1} i^{\nu+p-n} b(n, \nu, p) a(m, n | -\mu, \nu | p, p-1) \psi_{p, m-\mu}^{(3)}(\vec{r}_j^{/O_i})$$

où $p = |n - \nu|, |n - \nu| + 2, \dots, n + \nu - 2, n + \nu$

$$a(n, \nu, p) = \frac{2\nu(\nu+1)(2\nu+1) + (\nu+1)(n-\nu+p+1)(n+\nu-p) - \nu(\nu-n+p+1)(n+\nu+p+2)}{2\nu(\nu+1)}$$

$$b(n, \nu, p) = \frac{(2\nu+1)\sqrt{(n+\nu+p+1)(\nu-n+p)(n-\nu+p)(n+\nu-p+1)}}{2\nu(\nu+1)}$$

$$a(m, n | \mu, \nu | p) = (-1)^{m+\mu} (2p+1) \left[\frac{(n+m)!(\nu+\mu)!(p-m-\mu)!}{(n-m)!(\nu-\mu)!(p+m+\mu)!} \right]^{1/2} \cdot \begin{pmatrix} n & \nu & p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & \nu & p \\ m & \mu & -m-\mu \end{pmatrix}$$

et

$$a(m, n | \mu, \nu | p, q) = (-1)^{m+\mu} (2p+1) \left[\frac{(n+m)!(\nu+\mu)!(p-m-\mu)!}{(n-m)!(\nu-\mu)!(p+m+\mu)!} \right]^{1/2} \cdot \begin{pmatrix} n & \nu & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & \nu & p \\ m & \mu & -m-\mu \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$ est le symbole de Wigner 3-J. Il peut être calculé par l'expression de Racah⁵⁶. Un important gain de calcul est produit en utilisant ses propriétés de symétries^{57/58}.

Calcul de $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$:

✓ Pour $j_1+j_2+j_3$ pair, $m_1+m_2+m_3$ nul, et dans le cas où les arguments de toutes les factorielles apparaissant dans l'expression ci dessous sont positifs ou nuls :

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1-j_2-m_3} \sqrt{\frac{(j_1+j_2-j_3)!(j_1-j_2+j_3)!(-j_1+j_2+j_3)!}{(j_1+j_2+j_3-1)!}} \\ \cdot \sqrt{(j_1-m_1)!(j_1+m_1)!(j_2-m_2)!(j_2+m_2)!(j_3-m_3)!(j_3+m_3)!} \\ \cdot \sum_q \frac{(-1)^q}{q!(j_1+j_2-j_3-q)!(j_1-m_1-q)!(j_2+m_2-q)!(j_3-j_2+m_1+q)!(j_3-j_1-m_2+q)!}$$

✓ Dans tous les autres cas :

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = 0$$

⁵⁶ Racah G., Phys.Rev. 61, 186 (1941); Phys.Rev. 62, 438 (1942); Phys.Rev. 63, 367 (1943)

⁵⁷ Edmons R., Angular Momentum in Quantum Mechanics, Princeton University Press, New York, 1957 (12 symétries)

⁵⁸ Regge T., Nuovo cimento 10, 544 (1958)

ANNEXE 6 : FORMULATION DE LA DIFFUSION MULTIPLE PAR LA MATRICE MULTICENTREE

De l'expression des coefficients de la décomposition en harmoniques sphériques des ondes diffusées par une inclusion placée en $\vec{r}_j$:

$$\begin{bmatrix} A_{jnm}^{\text{diff}} \\ B_{jnm}^{\text{diff}} \\ C_{jnm}^{\text{diff}} \end{bmatrix} = T_{jn} \left\{ \begin{bmatrix} A_{jnm}^{\text{inc}} \\ B_{jnm}^{\text{inc}} \\ C_{jnm}^{\text{inc}} \end{bmatrix} + \sum_{i \neq j}^N \left[\sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v S_{nm}^{v\mu}(\vec{r}_j / O_i) \begin{bmatrix} A_{iv\mu}^{\text{diff}} \\ B_{iv\mu}^{\text{diff}} \\ C_{iv\mu}^{\text{diff}} \end{bmatrix} \right] \right\}$$

Lim et Hackman regroupent les coefficients de la décomposition harmonique en vecteurs $X_{jnm}^{\text{diff}} = \begin{bmatrix} A_{jnm}^{\text{diff}} \\ B_{jnm}^{\text{diff}} \\ C_{jnm}^{\text{diff}} \end{bmatrix}$ et $X_{jnm}^{\text{inc}} = \begin{bmatrix} A_{jnm}^{\text{inc}} \\ B_{jnm}^{\text{inc}} \\ C_{jnm}^{\text{inc}} \end{bmatrix}$, puis exprime la somme

l'ensemble des inclusions par un produit de matrice :

$$X_{jnm}^{\text{diff}} = T_{jn} \left\{ X_{jnm}^{\text{inc}} + \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v \left[S_{nm}^{v\mu}(\vec{r}_1 / O_j) S_{nm}^{v\mu}(\vec{r}_2 / O_j) \dots 0 \dots S_{nm}^{v\mu}(\vec{r}_N / O_j) \right] \cdot \begin{bmatrix} X_{1nm}^{\text{diff}} \\ X_{2nm}^{\text{diff}} \\ \dots \\ X_{jnm}^{\text{diff}} \\ \dots \\ X_{Nnm}^{\text{diff}} \end{bmatrix} \right\}$$

Soit pour l'ensemble des inclusions :

$$\begin{bmatrix} X_{1nm}^{\text{diff}} \\ X_{2nm}^{\text{diff}} \\ \vdots \\ X_{jnm}^{\text{diff}} \\ \vdots \\ X_{2nm}^{\text{diff}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{1n} & & & & \\ & T_{2n} & & & \\ & & 0 & & \\ & & & T_{jn} & \\ & 0 & & & \\ & & & & T_{Nn} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} X_{1nm}^{\text{inc}} \\ X_{2nm}^{\text{inc}} \\ \vdots \\ X_{jnm}^{\text{inc}} \\ \vdots \\ X_{2nm}^{\text{inc}} \end{bmatrix} + \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v \begin{bmatrix} 0 & S_{nm}^{v\mu}(\vec{r}_2^{/O_1}) & S_{nm}^{v\mu}(\vec{r}_j^{/O_1}) & S_{nm}^{v\mu}(\vec{r}_N^{/O_1}) \\ S_{nm}^{v\mu}(\vec{r}_1^{/O_2}) & 0 & S_{nm}^{v\mu}(\vec{r}_j^{/O_2}) & S_{nm}^{v\mu}(\vec{r}_N^{/O_2}) \\ S_{nm}^{v\mu}(\vec{r}_1^{/O_j}) & S_{nm}^{v\mu}(\vec{r}_2^{/O_j}) & 0 & S_{nm}^{v\mu}(\vec{r}_N^{/O_j}) \\ S_{nm}^{v\mu}(\vec{r}_1^{/O_N}) & S_{nm}^{v\mu}(\vec{r}_2^{/O_N}) & S_{nm}^{v\mu}(\vec{r}_j^{/O_N}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1nm}^{\text{diff}} \\ X_{2nm}^{\text{diff}} \\ \vdots \\ X_{jnm}^{\text{diff}} \\ \vdots \\ X_{Nnm}^{\text{diff}} \end{bmatrix} \right\}$$

Qu'on peut exprimer sous la forme : $\mathcal{X}_{nm}^{\text{diff}} = \mathcal{T}_n \left\{ \mathcal{X}_{nm}^{\text{inc}} + \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v \mathcal{S}_{nm}^{v\mu} \cdot \mathcal{X}_{nm}^{\text{diff}} \right\}$, avec :

$$\mathcal{X}_{nm}^{\text{inc/diff}} = \begin{bmatrix} X_{1nm}^{\text{diff/diff}} \\ X_{2nm}^{\text{diff/diff}} \\ \vdots \\ X_{jnm}^{\text{diff/diff}} \\ \vdots \\ X_{2nm}^{\text{diff/diff}} \end{bmatrix}, \quad n = \begin{bmatrix} T_{1n} & & & & \\ & T_{2n} & & & \\ & & 0 & & \\ & & & T_{jn} & \\ & 0 & & & \\ & & & & T_{Nn} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_{nm}^{v\mu} = \begin{bmatrix} 0 & S_{nm}^{v\mu}(\vec{r}_2^{/O_1}) & S_{nm}^{v\mu}(\vec{r}_j^{/O_1}) & S_{nm}^{v\mu}(\vec{r}_N^{/O_1}) \\ S_{nm}^{v\mu}(\vec{r}_1^{/O_2}) & 0 & S_{nm}^{v\mu}(\vec{r}_j^{/O_2}) & S_{nm}^{v\mu}(\vec{r}_N^{/O_2}) \\ S_{nm}^{v\mu}(\vec{r}_1^{/O_j}) & S_{nm}^{v\mu}(\vec{r}_2^{/O_j}) & 0 & S_{nm}^{v\mu}(\vec{r}_N^{/O_j}) \\ S_{nm}^{v\mu}(\vec{r}_1^{/O_N}) & S_{nm}^{v\mu}(\vec{r}_2^{/O_N}) & S_{nm}^{v\mu}(\vec{r}_j^{/O_N}) & 0 \end{bmatrix}$$

En tronquant à l'ordre P la somme infini sur v , ils obtiennent finalement :

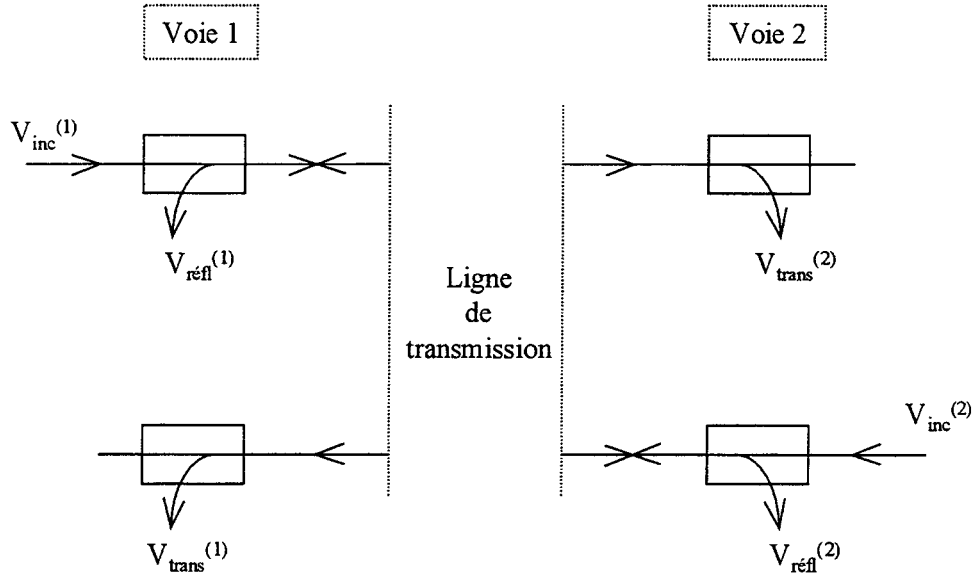
$$X_{MC}^{diff} = T \{ X_{MC}^{inc} + S X_{MC}^{diff} \}$$

avec :

$$S = \begin{vmatrix} \mathcal{S}_{00}^{00} & \mathcal{S}_{00}^{1-1} & \mathcal{S}_{00}^{10} & \mathcal{S}_{00}^{11} & \mathcal{S}_{00}^{PP} \\ \mathcal{S}_{1-1}^{00} & \mathcal{S}_{1-1}^{1-1} & \mathcal{S}_{1-1}^{10} & \mathcal{S}_{1-1}^{11} & \mathcal{S}_{1-1}^{PP} \\ \mathcal{S}_{10}^{00} & \mathcal{S}_{10}^{1-1} & \mathcal{S}_{10}^{10} & \mathcal{S}_{10}^{11} & \mathcal{S}_{10}^{PP} \\ \mathcal{S}_{11}^{00} & \mathcal{S}_{11}^{1-1} & \mathcal{S}_{11}^{10} & \mathcal{S}_{11}^{11} & \mathcal{S}_{11}^{PP} \\ \mathcal{S}_{PP}^{00} & \mathcal{S}_{PP}^{1-1} & \mathcal{S}_{PP}^{10} & \mathcal{S}_{PP}^{11} & \mathcal{S}_{PP}^{PP} \end{vmatrix}, \quad X_{MC}^{inc/diff} = \begin{vmatrix} x_{00}^{inc/diff} \\ x_{1-1}^{inc/diff} \\ x_{10}^{inc/diff} \\ x_{11}^{inc/diff} \\ x_{PP}^{inc/diff} \end{vmatrix}, \quad \text{et}, \quad T = \begin{vmatrix} \tau_0 & & & & \\ & \tau_1 & & & 0 \\ & & \tau_1 & & \\ & & & \tau_1 & \\ 0 & & & & \\ & & & & \tau_P \end{vmatrix}$$

ANNEXE 7 : DEFINITION DES PARAMETRES S

Les paramètres S, définis par le schéma suivant, sont la mesure de la fonction de transfert complexe en transmission ou en réflexion du système considéré comme une ligne de transmission. Nous nous plaçons dans le cas où elle est adaptée.



$$S_{11} = \frac{V_{refl}^{(1)}}{V_{inc}^{(1)}}$$

$$S_{21} = \frac{V_{trans}^{(2)}}{V_{inc}^{(1)}}$$

$$S_{12} = \frac{V_{trans}^{(1)}}{V_{inc}^{(2)}}$$

$$S_{22} = \frac{V_{refl}^{(2)}}{V_{inc}^{(2)}}$$

Lorsque le signal incident est envoyé dans la voie 1, le signal réfléchi est mesuré par le paramètre S_{11} , le signal transmis par le système de mesure à la voie 2 est mesuré par le paramètre S_{21} .

Lorsque le signal incident est envoyé dans la voie 2, le signal réfléchi est mesuré par le paramètre S_{22} , le signal transmis par le système de mesure à la voie 1 est mesuré par le paramètre S_{12} .

ANNEXE 8 : IMPEDANCE RAMENEE ET RELATION ENTREE-SORTIE DU SYSTEME ACOUSTIQUE

Nous reprenons les expressions de la relation entrée-sortie et de l'impédance ramenée du système acoustique constitué de trois couches sous incidence normale.

$$\frac{v_s}{v_e} = T_1 \quad T_2 \quad T_3$$

avec :

$$T_1 = \frac{\overline{t_{12}} e^{-i\theta_1}}{1 - \overline{r_{12}} e^{-2i\theta_1}}, \quad T_2 = \frac{\overline{t_{23}} e^{-i\theta_2}}{1 - \overline{r_{23}} e^{-2i\theta_2}}, \quad T_3 = \frac{t_{34} e^{-i\theta_3}}{1 - r_{34} e^{-2i\theta_3}}$$

$$Z_{01} = Z_1 \frac{1 + \overline{r_{12}} e^{-2i\theta_1}}{1 - \overline{r_{12}} e^{-2i\theta_1}}, \quad \overline{r_{12}} = \frac{Z_{12} - Z_1}{Z_{12} + Z_1}, \quad Z_{12} = Z_2 \frac{1 + \overline{r_{23}} e^{-2i\theta_2}}{1 - \overline{r_{23}} e^{-2i\theta_2}}, \quad \overline{r_{23}} = \frac{Z_{23} - Z_2}{Z_{23} + Z_2} \text{ et } Z_{23} = Z_3 \frac{1 + r_{34} e^{-2i\theta_3}}{1 - r_{34} e^{-2i\theta_3}}.$$

Nous obtenons tous calculs effectués :

$$\overline{r_{23}} = \frac{r_{23} + r_{34} e^{-2i\theta_3}}{1 - r_{32} r_{34} e^{-2i\theta_3}}, \quad Z_{12} = Z_2 \frac{1 + r_{23} e^{-2i\theta_2} + r_{23} r_{34} e^{-2i\theta_3} + r_{34} e^{-2i(\theta_2+\theta_3)}}{1 - r_{23} e^{-2i\theta_2} + r_{23} r_{34} e^{-2i\theta_3} - r_{34} e^{-2i(\theta_2+\theta_3)}} \text{ et } \overline{r_{12}} = \frac{r_{12} + r_{23} e^{-2i\theta_2} + r_{12} r_{23} r_{34} e^{-2i\theta_3} + r_{34} e^{-2i(\theta_2+\theta_3)}}{1 - r_{21} r_{23} e^{-2i\theta_2} - r_{32} r_{34} e^{-2i\theta_3} - r_{21} r_{34} e^{-2i(\theta_2+\theta_3)}}.$$

Ainsi :

$$\frac{Z_{01}}{Z_1} = \frac{1 + r_{12} e^{-2i\theta_1} + r_{12} r_{23} e^{-2i\theta_2} + r_{23} r_{34} e^{-2i\theta_3} + r_{12} r_{34} e^{-2i(\theta_2+\theta_3)} + r_{23} e^{-2i(\theta_1+\theta_2)} + r_{12} r_{23} r_{34} e^{-2i(\theta_1+\theta_3)} + r_{34} e^{-2i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}}{1 - r_{12} e^{-2i\theta_1} + r_{12} r_{23} e^{-2i\theta_2} + r_{23} r_{34} e^{-2i\theta_3} + r_{12} r_{34} e^{-2i(\theta_2+\theta_3)} - r_{23} e^{-2i(\theta_1+\theta_2)} - r_{12} r_{23} r_{34} e^{-2i(\theta_1+\theta_3)} - r_{34} e^{-2i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}}$$

et

$$\frac{v_s}{v_e} = \frac{t_{12} t_{23} t_{34} e^{-i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}}{1 - r_{12} e^{-2i\theta_1} - r_{21} r_{23} e^{-2i\theta_2} - r_{32} r_{34} e^{-2i\theta_3} - r_{21} r_{34} e^{-2i(\theta_2+\theta_3)} - r_{23} e^{-2i(\theta_1+\theta_2)} - r_{12} r_{23} r_{34} e^{-2i(\theta_1+\theta_3)} - r_{34} e^{-2i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}}$$

ANNEXE 9 : EXPRESSION DES PARAMETRES S DU SYSTEME DE MESURE

Nous différencions les deux transducteurs par les exposants (1) et (2).

Paramètre S_{21} :

Le découplage entre le phénomène de transduction et les caractéristiques de propagation dans les milieux permet d'exprimer le paramètre S_{21} sous la forme :

$$S_{21} = K_{21} S_{21}^{ac}$$

avec :

$$K_{21} = \frac{4 Z_c \Re(Z_{el}^{\infty(2)})}{(Z_{el}^{\infty(1)} + r_0)(Z_{el}^{\infty(2)} + Z_c)} A^{(2)} \frac{K_e^{\infty(1)} Z_{el}^{\infty(1)}}{K_e^{\infty(2)} Z_{el}^{\infty(2)}} \quad \text{puisque } (K_e^{\infty} Z_{el}^{\infty})^2 = -A \Re(Z_{el}^{\infty})$$

$$= \frac{4 Z_c \sqrt{\Re(Z_{el}^{\infty(1)}) \Re(Z_{el}^{\infty(2)})}}{(Z_{el}^{\infty(1)} + r_0)(Z_{el}^{\infty(2)} + Z_c)} \sqrt{\frac{Z_3}{Z_1}} \sqrt{A^{(1)} A^{(2)}}$$

et

$$S_{21}^{ac} = \frac{1 - \overline{r_{12}} e^{-2i\theta_1}}{1 - r_{10} \overline{r_{12}} e^{-2i\theta_1}} \frac{v_s}{v_e}$$

En utilisant l'expression 2.02-16 du coefficient de réflexion $\overline{r_{12}}$, nous obtenons pour S_{21}^{ac} :

$$S_{21}^{ac} = \frac{t_{12} t_{23} e^{-i(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)}}{D}$$

avec :

$$D = 1 - r_{10} r_{12} e^{-2i\theta_1} - r_{21} r_{23} e^{-2i\theta_2} - r_{32} r_{34} e^{-2i\theta_3} - r_{10} r_{23} e^{-2i(\theta_1 + \theta_2)} - r_{21} r_{34} e^{-2i(\theta_2 + \theta_3)} + r_{10} r_{12} r_{32} r_{34} e^{-2i(\theta_1 + \theta_3)} - r_{10} r_{34} e^{-2i(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)}$$

Paramètre S_{11} :

$$S_{11} = S_{11}^{\infty} - K_{11} S_{11}^{\text{ac}}$$

$$K_{11} = \frac{4 r_0 \Re(Z_{\text{el}}^{\infty(1)})}{\left(Z_{\text{el}}^{\infty(1)} + r_0\right)^2} A^{(1)}$$

et

$$S_{11}^{\text{ac}} = \frac{\overline{r_{12}} e^{-2 i \theta_1}}{1 - r_{10} \overline{r_{12}} e^{-2 i \theta_1}}$$

En utilisant l'expression 2.02-16 du coefficient de réflexion $\overline{r_{12}}$, nous obtenons pour S_{11}^{ac} :

$$S_{11}^{\text{ac}} = \frac{r_{12} e^{-2 i \theta_1} + r_{23} e^{-2 i (\theta_1 + \theta_2)} + r_{34} e^{-2 i (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)} + r_{12} r_{23} r_{34} e^{-2 i (\theta_1 + \theta_3)}}{D}$$

Paramètre S_{22} :

$$S_{22} = S_{22}^{\infty} - K_{22} S_{22}^{\text{ac}}$$

avec :

$$K_{22} = \frac{4 r_0 \Re(Z_{\text{el}}^{\infty(2)})}{\left(Z_{\text{el}}^{\infty(2)} + r_0\right)^2} A^{(2)}$$

et :

$$S_{22}^{\text{ac}} = \frac{r_{32} e^{-2 i \theta_3} + r_{21} e^{-2 i (\theta_3 + \theta_2)} + r_{10} e^{-2 i (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)} + r_{32} r_{21} r_{10} e^{-2 i (\theta_1 + \theta_3)}}{D}$$

ANNEXE 10 : SIMULATION DES GRANDEURS INTERVENANT DANS LES PARAMETRES S

▪ Coefficient de conversion électro-acoustique :

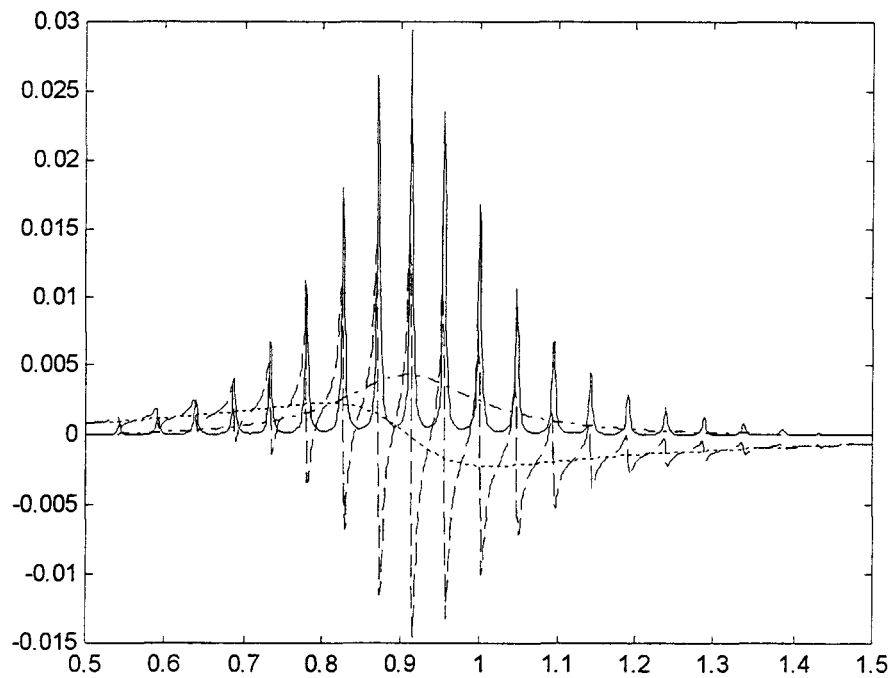
Le calcul de coefficient de conversion électro-acoustique est effectué à partir de l'expression 2.03-7 :

$$K_e = \frac{1}{Z_{el}} \frac{i e}{\varepsilon \omega S} (H_{11}^{e'} + H_{12}^{e'})$$

Le coefficient de conversion électro-acoustique pour le transducteur chargé par un milieu semi-infini est calculé à partir de l'expression :

$$K_e^\infty = \frac{e}{\varepsilon \omega S} \frac{1}{Z_{el}^\infty} \frac{1 - \cos \theta}{Z_p \sin \theta - i Z_l \cos \theta}$$

Figure : coefficient de conversion électro-acoustique



Partie réelle (—) et imaginaire (---)
du coefficient de conversion K_e ($\text{ms}^{-1}\text{V}^{-1}$)

Partie réelle (---) et imaginaire (----)
du coefficient de conversion K_e^∞ ($\text{ms}^{-1}\text{V}^{-1}$)

en fonction de la fréquence (MHz)

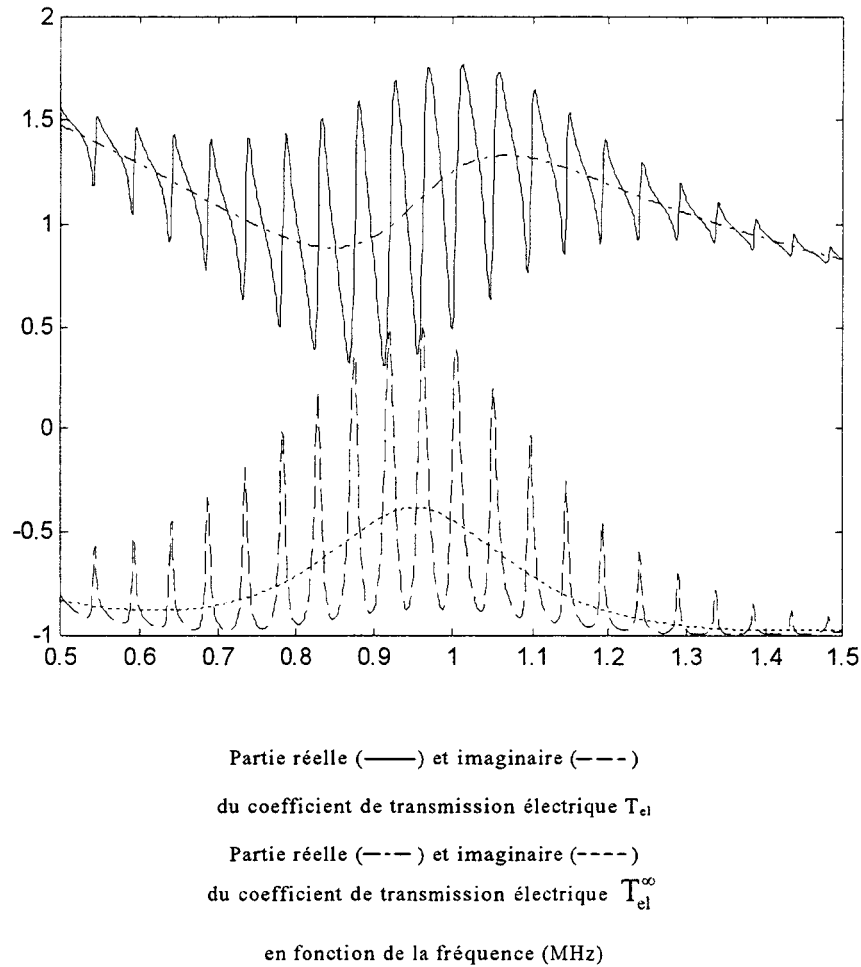
On retrouve les fluctuations de K_e autour de K_e^∞ . Ces fluctuations se produisent avec la même période que celles de l'impédance ramenée Z_{01} .

▪ **Coefficient de transmission électrique :**

Le coefficient de transmission électrique est calculé à partir de l'expression 2.03-23 :

$$T_{el} = T_{el}^{\infty} \frac{1 - A \frac{Z_{el}^{\infty*}}{Z_{el}^{\infty}} r_{12} e^{-2i\theta_1}}{1 - r_{10} r_{12} e^{-2i\theta_1}}, \text{ avec } T_{el}^{\infty} = \frac{2 Z_{el}^{\infty}}{Z_{el}^{\infty} + r_0}$$

Figure : coefficient de transmission électrique



Le coefficient de transmission électrique, lié à l'impédance électrique du transducteur émetteur, présente les oscillations caractéristiques de la propagation dans les trois milieux.

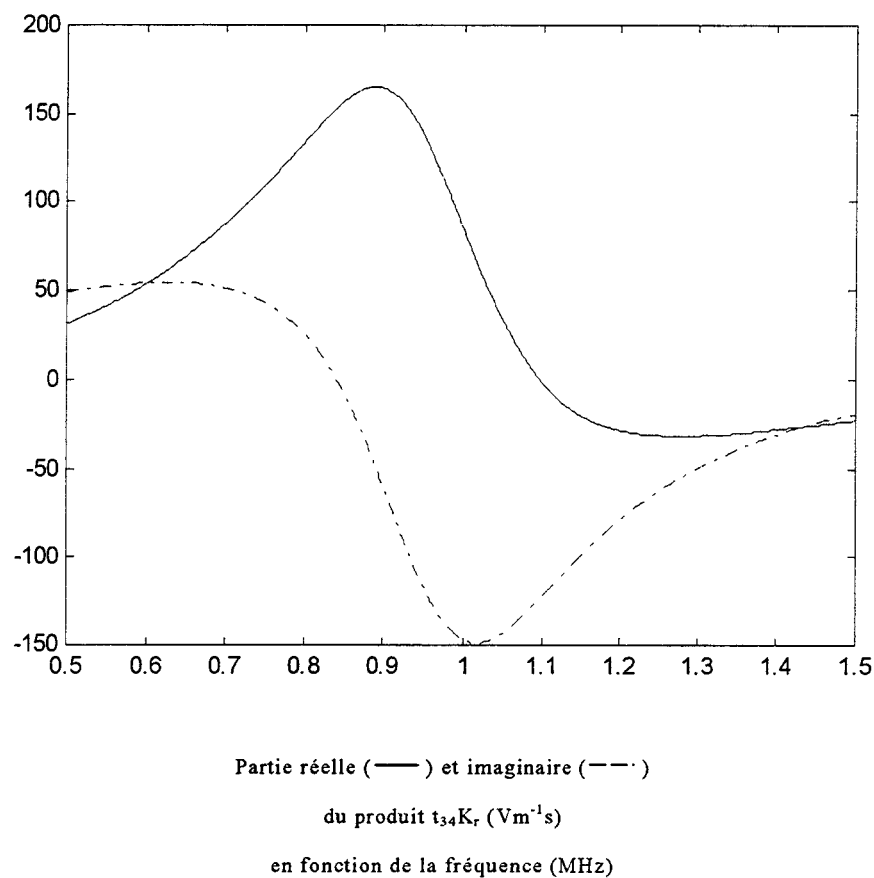
▪ **Coefficient de conversion acousto-électrique K_r :**

Le calcul du coefficient de conversion acousto-électrique est fait à partir de l'expression 2.03-11 :

$$K_r^{-1} = (H_{21}^{r'} + H_{22}^{r'}) \left(\frac{-i e}{\epsilon \omega S Z_c} \right) + H_{23}^{r'} \left(1 + \frac{1}{i C_o \omega S Z_c} \right)$$

Défini à partir du rapport de la tension aux bornes du transducteur récepteur à la vitesse particulière sur le transducteur, il ne représente pas complètement le phénomène de conversion acousto-électrique. Il est plus réaliste de calculer un coefficient équivalent par sa nature excepté qu'il est calculé à l'aide de la vitesse particulière transmise au transducteur. Cela revient à calculer le produit $t_{34}K_r$ que nous représentons sur la figure suivante.

Figure : *coefficient de conversion acousto-électrique*



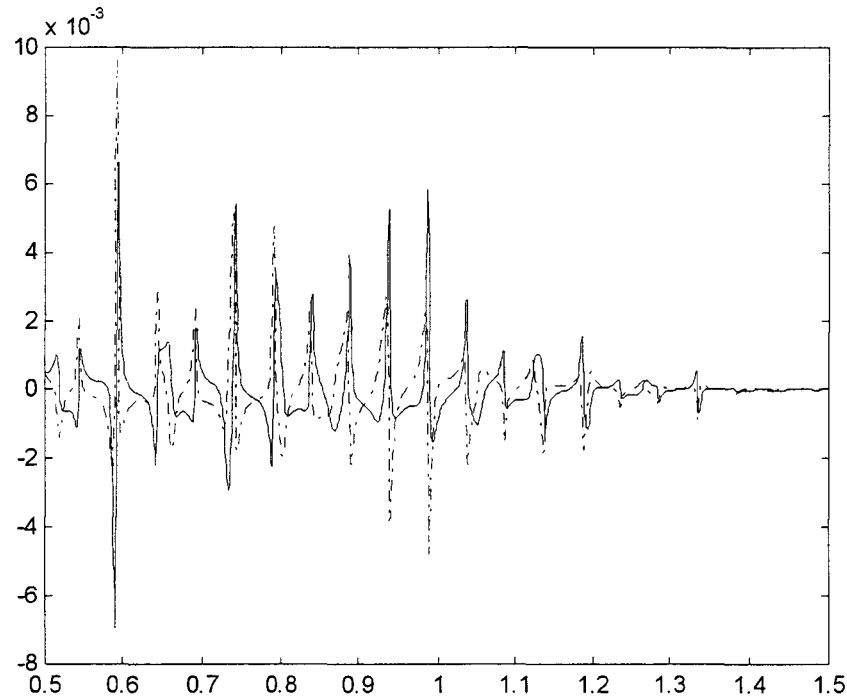
Son module est maximum aux alentours de la fréquence de résonance du transducteur.

▪ **Relation entrée-sortie acoustique vs/ve :**

Nous utilisons la relation 2.02-7 :

$$\frac{v_s}{v_e} = \frac{t_{12}t_{23}t_{34} e^{-i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}}{1 - r_{12} e^{-2i\theta_1} - r_{21}r_{23} e^{-2i\theta_2} - r_{32}r_{34} e^{-2i\theta_3} - r_{21}r_{34} e^{-2i(\theta_2+\theta_3)} - r_{23} e^{-2i(\theta_1+\theta_2)} - r_{12}r_{23}r_{34} e^{-2i(\theta_1+\theta_3)} - r_{34} e^{-2i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}}$$

Figure : relation entrée-sortie acoustique



Partie réelle (—) et imaginaire (----)

du rapport v_s/v_e

en fonction de la fréquence (MHz)

Les effets de la transduction, contenus dans les coefficients t_{34} et r_{34} conduisent à une élimination progressive du signal en dehors de la bande passante des transducteurs.

ANNEXE 11 : REPONSE DES TRANSDUCTEURS

✓ Transducteur de fréquence centrale 500kHz

IMASONIC S.A.
MESURES ELECTROACOUSTIQUES

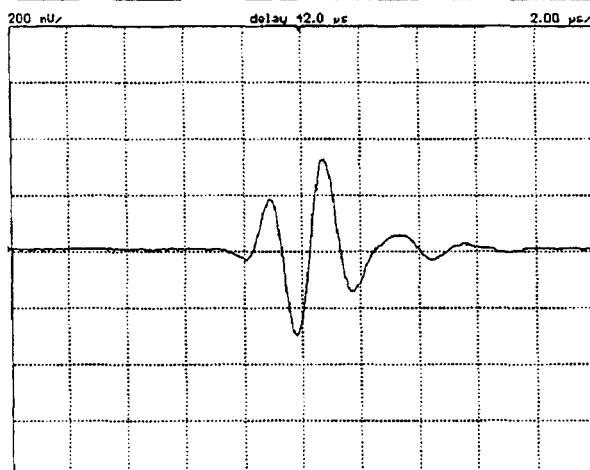
Spectre V4.02 - 4/9

Date : 15 juin 2000
Transducteur : IM-0.5-19-P
Numéro de série : 2388 0102
Fréquence Nominale : 500 KHz

Opérateur : JB

Générateur : 5052 PR n° IM 32
Signal d'excitation : Damp 6 - Energy 1
Oscilloscope : HP 54600 A n° IM 2
Longueur de câble :
Instruction : INP 413
Type de cible : plane en laiton
Distance de la cible : 30.1 mm
Att.= 20 dB ; Gain= 20 dB

SIGNAL



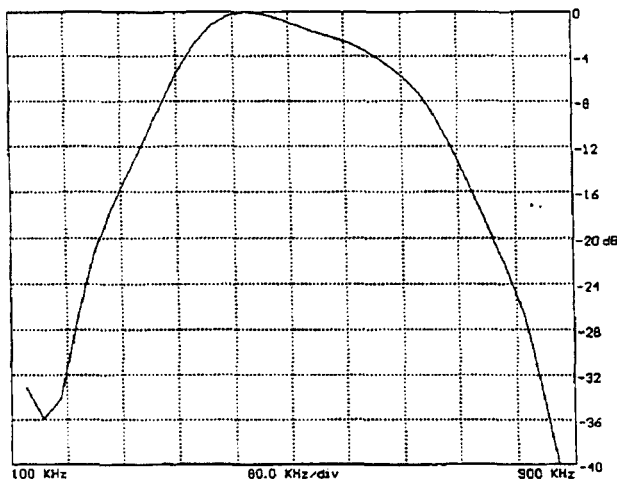
LONGUEURS D'IMPULSIONS

-6dB : 2.28 µs
-20dB : 6.60 µs

TENSIONS

Crête-crête : 631 mV

SPECTRE D'EMISSION-RECEPTION



Caractéristiques à -6dB

Fréquence centrale : 500 KHz
Rapport BP/Fc : 65%
Bande passante : 327 KHz
Coupure basse : 337 KHz
Coupure haute : 664 KHz

IMASONIC S.A.
MESURES ELECTROACOUSTIQUES

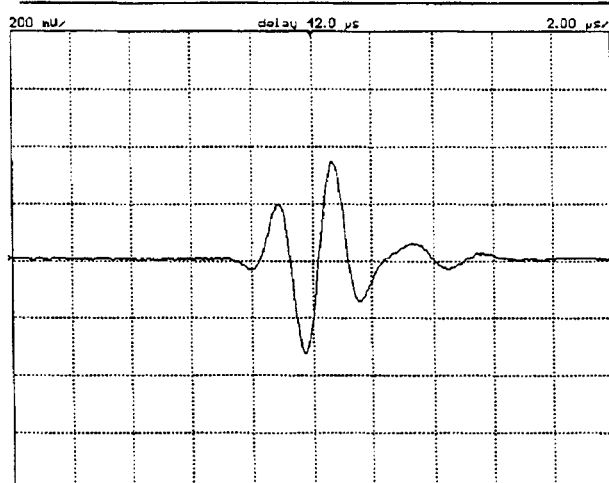
Spectre V4.02 - 4/9

Date : 15 juin 2000
Transducteur : IM-0.5-19-P
Numéro de série : 2388 0101
Fréquence Nominale : 500 KHz

Opérateur : JB

Générateur : 5052 PR n° IM 32
Signal d'excitation : Damp 6 - Energy 1
Oscilloscope : HP 54600 A n° IM 2
Longueur de câble :
Instruction : INP 413
Type de cible : plane en laiton
Distance de la cible : 30.1 mm
Att.= 20 dB ; Gain= 20 dB

SIGNAL



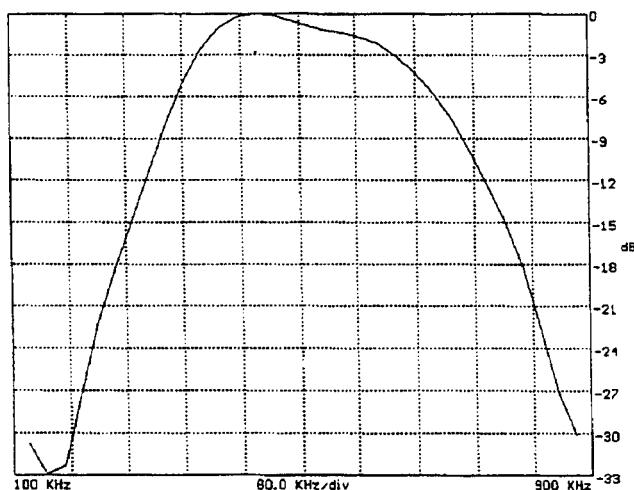
LONGUEURS D'IMPULSIONS

-6dB : 2.28 μ s
-20dB : 6.72 μ s

TENSIONS

Crête-crête : 669 mV

SPECTRE D'EMISSION-RECEPTION



Caractéristiques à -6dB

Fréquence centrale : 510 KHz
Rapport BP/Fc : 69%
Bande passante : 354 KHz
Coupe basse : 333 KHz
Coupe haute : 687 KHz

✓ Transducteurs 1 MHz

IMASONIC S.A.
MESURES ELECTROACOUSTIQUES

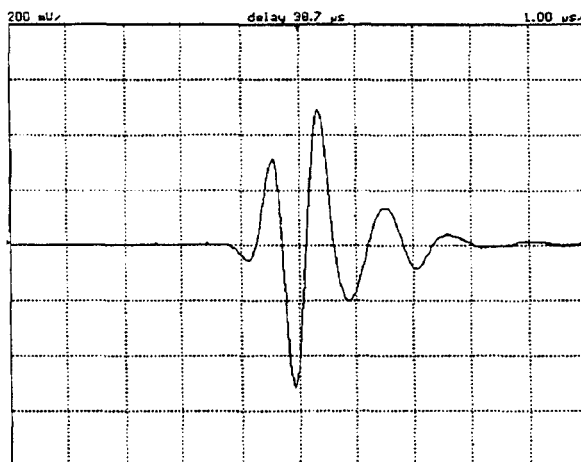
Spectre V4.02 - 4/9

Date : 14 juin 2000
Transducteur : IM-1-13-P
Numéro de série : 2485 0101
Fréquence Nominale : 1.00 MHz

Opérateur : JB

Générateur : 5052 PR n° IM 32
Signal d'excitation : Damp 6 - Energy 1
Oscilloscope : HP 54600 A n° IM 02
Longueur de câble : 1.00 m
Instruction : INP 413
Type de cible : plane en laiton
Distance de la cible : 28.3 mm
Att.= 20 dB ; Gain= 20 dB

SIGNAL



LONGUEURS D'IMPULSIONS

-6dB : 1.04 μ s
-20dB : 3.14 μ s

TENSIONS

Crête-crête : 1.01 V

SPECTRE D'EMISSION-RECEPTION



Caractéristiques à -6dB

Fréquence centrale : 1.09 MHz
Rapport BP/Fc : 65%
Bande passante : 709 KHz
Coupure basse : 736 KHz
Coupure haute : 1.44 MHz

IMASONIC S.A.
MESURES ELECTROACOUSTIQUES

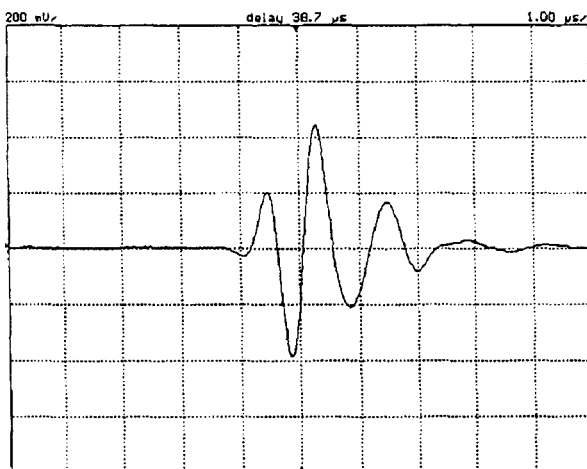
Spectre V4.02 - 4/9

Date : 14 juin 2000
Transducteur : IM-1-13-P
Numéro de série : 2485 0102
Fréquence Nominale : 1.00 MHz

Opérateur : JB

Générateur : 5052 PR n° IM 32
Signal d'excitation : Damp 6 - Energy 1
Oscilloscope : HP 54600 A n° IM 02
Longueur de câble : 1.00 m
Instruction : INP 413
Type de cible : plane en laiton
Distance de la cible : 28.2 mm
Att.= 20 dB ; Gain= 20 dB

SIGNAL



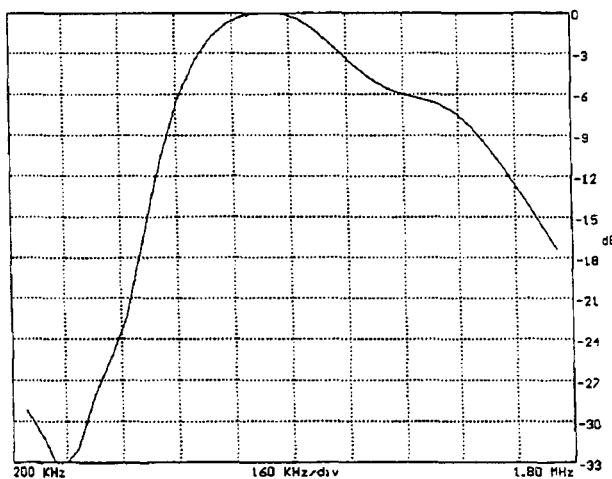
LONGUEURS D'IMPULSIONS

-6dB : 720 ns
-20dB : 2.92 µs

TENSIONS

Crête-crête : 837 mV

SPECTRE D'EMISSION-RECEPTION



Caractéristiques à -6dB

Fréquence centrale : 1.01 MHz
Rapport BP/Fc : 62%
Bande passante : 626 KHz
Coupe basse : 692 KHz
Coupe haute : 1.32 MHz

BIBLIOGRAPHIE :

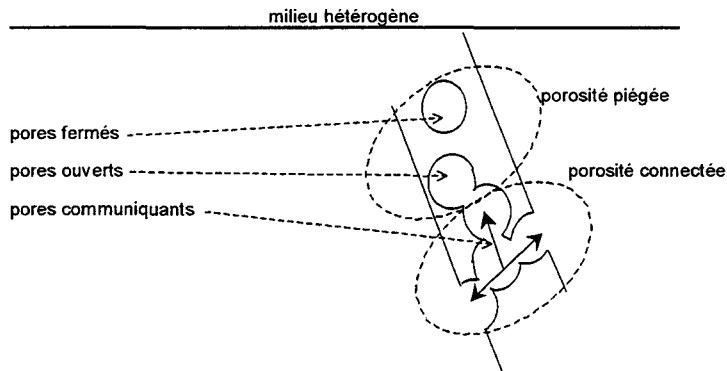
- Albert D.G.**, '*A comparison between wave propagation in water-saturated and air-saturated porous materials*' J.Appl.Phys., 73 (1), pp 28-36, jan 1993
- Attenborough K.**, '*Acoustical characteristics of rigid fibrous absorbents and granular materials*', J.Acoust.Soc.Am. 73(3), pp 785-799, 1983
- Biot M.A.**, '*Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid. 1 Low frequency range, 2 Higher frequency range*' JASA, vol 28, n°2, pp 168-178, pp 179-191, march 1956
- Biot M.A.**, '*Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid. 2 Higher frequency range*' JASA, vol 28, n°2, pp 179-191, march 1956
- Biot M.A., Willis D.G.**, '*The elastic coefficients of the theorie of consolidation*', journ. Appl. Mech. pp 594-602, dec 1957
- Boumiz A.**, '*Etude comparée des évolutions mécaniques et chimiques des pâtes de ciment et mortiers à très jeune age, développement des techniques acoustiques*', Thèse de doctorat, déc 1995
- Brill D., Gaunard G.**, '*Resonance theory of elastic waves ultrasonically scattered from an elastic sphere*', J.Acoust.Soc.Am 81 (1),pp 1-21, jan 1987
- Chaffaï S., Roberjot V., Peyrin F., Berger G., Laugier P.**, '*Frequency dependence of ultrasonic backscattering in cancellous bone : Autocorrelation model and experimental results*', J.Acoust.Soc.Am. 108 (5), Pt.1, pp 2403-2411, nov 2000
- Chaffaï S., Padilla F., Berger G., Laugier P.**, '*In vitro measurement of the frequency-dependent attenuation in cancellous bone between 0,2 and 2 MHz*', J.Acoust.Soc.Am. 108 (3), Pt.1, pp 1281-1289, sept 2000
- Cruzan O.**, '*Translational addition theorems for spherical vector wave functions*', Quart.Appl.Math. 20, pp 33-40 1962
- Deblock Y., Campistron P., Lippert M., Bruneel C.**, '*Electrical characterization of plate piezo electric transducer bounded to a finite substrate*', J. Acoust. Soc. Am 111 (6) pp 2681-2685, jun 2002
- Deblock Y.**, '*Caractérisation ultrasonore haute fréquence des propriétés viscoélastiques de milieux liquides*', thèse de doctorat, juin 1997
- Depollier C.**, '*Théorie de Biot et prédiction des propriétés acoustiques des matériaux poreux. Propagation dans les milieux acoustiques désordonnés*', Thèse d'état, 13 janvier 1989
- Deprez X.**, '*L'ostéoporose : définition et conséquences cliniques et économiques*', Actes du congrès : Secondes journées d'études sur l'interaction des ultrasons avec les milieux biologiques, publiés par l'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, nov 1998

- Derem A.**, *'Théorie de la matrice S et transformation de Sommerfeld-Watson dans la diffusion acoustique'*, La diffusion acoustique par des cibles élastiques de formes géométriques simples. N.Gespa (ed). Cedocar, Paris 1987, pp281-310
- Deti V.**, *'Théorie géométrique de la diffraction appliquée à la caractérisation expérimentale des propriétés acoustiques et dimensionnelles de la diaphyse osseuse.'*, thèse oct 2000
- Drugan W. J., Willis J. R.**, *'A micromechanics-based nonlocal constitutive equation and estimates of representative volume element size for elastic composites'*, Journal of the mechanics and physics of solids, vol 44, p 497-524
- Edmons R.**, Angular Momentum in Quantum Mechanics, Princeton University Press, New York, 1957 (12 symétries)
- Eischen J. W., Torquato S.**, *'Determining elastic behavior of composites by the boundary element method'*, J. Appl. Phys. Vol 74 (1), july 1993
- Folacci A., Rossi J.-L., Sessarego J.-P.**, *'GTD analysis of scattering by two elastic spheres'*, Acustica. acta acustica, vol 83, pp93-104, 1997
- Foldy L.L.**, *'The multiple scattering of waves'*, Phy. Rev. vol 67, n°3-4, p 107-119, feb 1945
- Friedman B., Russek J.**, *'Addition theorems for spherical waves'*, Quart.Appl.Math. n°12, pp 13-23 (1954)
- Grenoble D.E., Katz J.L., Dunn K.L., Gilmore R.S., Murty K.L.**, *'The elastic properties of hard tissues and apatites'*, J.Biomed.Mater.Res. Vol 6, p221-223, 1972
- Hasan M.A., Azimi-Sadjadi M.R., Dobeck G.J.**, *'Separation of multiple time delays using new spectral estimation schemes'*, IEEE transactions on signal processing, vol 46, n°6, jun 1998
- Hashin Z., Shtrikman S.**, *'A variational approach to the theory of elastic behaviour of multiphase materials'*, J.Mech.Phys.Solids, vol 11, p 127-140, 1963
- HoBaTho M.C. Rho J.Y, Ashman R.B.**, *'Anatomical variation of mechanical properties of human cortical and cancellous bone'*, Secondes journées d'études sur l'interaction des ultrasons avec les milieux biologiques, publiés par l'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, nov 1998
- Hosokawa A.**, *'A study on the propagation phenomena of ultrasonic waves in cancellous bone'*, Thesis, Doshisha University, nov 1997
- Ishimaru A.**, Wave Propagation and scattering in random media, Academic Press, 1978, vol 2
- Jonhson D.L., Plona T.J.**, *'Acoustic slow waves and the consolidation transition'*, J.Acoust.Soc.Am. 72 (2), p556-565, 1982
- Kaelin B., Johnson L.R.**, *'Dynamic composite elastic medium theory, part 2. Three-dimensionnal media'*, J.Appl.Phys. Vol 84, n°10, 15 nov 1998, pp 5458-5468
- Kroebel W., Mahrt K.-H.**, *'Recent result on absolute sound velocity measurements in pure water and sea water at atmospheric pressure'*, Acustica, vol 35, pp 154-164, 1976
- Kushibiki J.I., Akashi N., Sannomiya T., Chubachi N., Dunn F.**, *'VHF/UHF range bio-ultrasonic spectroscopy system and method'*, IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics and frequency control, vol 42, n°6, p1028-1039, nov1995
- Lemaitre J., Lacoche J.-L.**, Mechanics of solid materials, Cambridge university Press, Cambridge

Bibliographie

- Lim R., Hackman R.H.** , '*A formulation of multiple scattering by many bounded obstacles using a multicentered, T supermatrix*' J. Acoust.Soc.Am. 91, (2), p613-638, feb 1992
- Mal A. K., Bose S. K.**, '*Dynamic elastic moduli of a suspension of imperfectly bonded spheres*', Proc. Camb. Phil. Soc., vol 76, p 587-600, 1974
- Moroi H.H., Kimoto K., Moroi R., Terado Y.**, '*Numeric approach to the biomechanical analysis of thermal effects in coated implant*', Int.J.Prostodont, Vol 6, p564-572, 1993
- Morse P.M., Feshbach H.**, '*Methods of theoretical physics*' Mc Graw-Hill book company, McGraw-Hill book company inc., 1953
- Ostoj-Starzewski M.**, '*Random field model of heterogenous materials*', Int. J. Structures, vol 35, n°19, p 2429-2455,1998
- Peine.H., Guicking D.**, '*Acoustical resonance scattering theory for strongly overlapping resonances*', Acta Acustica vol 3, pp 233-241, jun 1995
- Perdigao J.M.**, '*Optimisation du contrôle par ultrasons des milieux hétérogènes*', Thèse année ,p44-54 et p61-67
- Pinkerton J.M.M.**, '*The absorption of ultrasonic waves in liquid and its relation to molecular constitution*', Proc.Phys.Soc., vol B20, pp 129-141, 1949
- Plona T.J.**, '*Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies*', Appl. Phys. Lett. 36, p259-261, feb 1980
- Racah G.**, Phys.Rev. 61, 186 (1941); Phys.Rev. 62, 438 (1942); Phys.Rev. 63, 367 (1943)
- Regge T.**, Nuovo cimento 10, 544 (1958)
- Roberts A.P, Garboczi E.J.**, '*Computation of the linear elastic properties of random porous materials with a wide variety of microstructure*', Proc.Royal Society, 458 (2021), pp1033-1054 (2002)
- Sachse W., Pao Y-H.**, '*On the determination of phase and group velocities of dispersive waves in solids*, J.Appl.Phys., 49(8) p4320-4327, Aug 1978
- Schwartz L.M., Johnson D.L.**, '*Long-wavelength acoustic propagation in ordered and disordered suspensions*', Physical review B, vol 30, n°8, p 4302-4313, oct 1984
- Sen P.N., Johnson D.L.**, '*Topological limitation of effective-medium approximation in fluid-solid systems having two longitudinal-acoustic modes*', Physical review B, Condensed matter, third series, vol 27, n°6, 15 march 1983
- Wang Y.M., Chew W.C.**, '*A recursive of T-matrix approach for the solution of electromagnetic scattering by many spheres*', IEEE trans. Antennas Propagat., vol 41, n°12, pp 1633-1639, 1993
- Waterman P.C., Truell R.**, '*Multiple scattering of waves*', Journal of mathematical Physics, Vol 2, n°4, july-august 1961
- Williams J.L.**, '*Ultrasonic wave propagation in cancellous and cortical bone : prediction of some experimental results by Biot's theory*', J.Acoust.Soc.Am. vol 91, pp1106-1112,1992

GLOSSAIRE :



β concentration en hétérogénéité ou porosité (concentration des pores)

Symboles mathématiques :

$\otimes$	produit de convolution
$\delta(t)$	distribution de Dirac nul pour t non nul
δ_{ij}	symbole de Kronecker nul pour idifférent de j
$i = (-1)^{\frac{1}{2}}$	imaginaire
z^*	complexe conjugué de z
$\Re, \Im$	partie réelle, imaginaire
$J_n(z)$	fonction de Bessel
$H_n(z)$	fonction de Hankel
$j_n(z)$	fonction de Bessel sphérique
$h_n(z)$	fonction de Hankel sphérique
$f_n^{(1/3)}$	fonction de Bessel sphérique (1), ou de Hankel sphérique (3)
$P_n^m(z)$	polynôme de Legendre
$\mathfrak{F}(z), \mathfrak{F}^{-1}(z)$	transformée de Fourier de z/transformée inverse
W	fenêtre de mesure
ϕ	phase

$$\frac{d^2 f_n}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{df_n}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) f_n = 0 \quad \text{pour } f_n(x) = A J_n(x) + B Y_n(x)$$

$$H_n(x) = J_n(x) + i Y_n(x)$$

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x), \quad h_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} H_{n+\frac{1}{2}}(x)$$

$$(1-x^2) \frac{d^2 P_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_n(x)}{dx} + n(n+1) P_n(x) = 0$$

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}$$

Caractéristiques des matériaux :

K, G	module élastique d'incompressibilité et de cisaillement statiques
λ, μ	coefficients de Lamé
ς	tortuosité
e_i	épaisseur du milieu i
ε	permittivité
e	coefficient piézo électrique
S	surface
ρ_i	masse volumique du milieu i
N, P, Q, R	constantes phénoménologiques de Biot
σ_{ij}, γ_{ij}	paramètres dynamiques et inertiels normalisés du modèle de Biot
δ	paramètre structurel
η	viscosité
P	pression

Grandeurs relatives à la propagation d'ondes acoustiques

δ_v	épaisseur de peau visqueuse
k_{Li}	nombre d'onde longitudinal dans le milieu i
f_c	fréquence caractéristique de Biot
f_d	fréquence au delà de laquelle la diffusion est prépondérante
k_{Ti}	nombre d'onde transversal dans le milieu i
α_i	coefficient d'atténuation dans le milieu i
v_i	célérité dans le milieu i
$v_{l/r}$	célérité des ondes longitudinales lente/rapide /transversales
$V_{C/R}$	célérité des ondes longitudinales /transversales en absence de mouvement relatif des deux phases
ω, f, t, λ	pulsation, fréquence, temps, longueur d'onde
t_{npq}	temps de vol associé à n parcours dans le milieu 1, p parcours dans le milieu 2 et q parcours dans le milieu 3
A_{npq}	amplitude du lobe apparaissant à l'instant t_{npq}
Z_i	impédance caractéristique du milieu i
Z_{ij}	impédance acoustique ramenée à l'interface des milieux i et j
r_{ij}	coefficient de réflexion à l'interface des milieux i et j
t_{ij}	coefficient de transmission entre les milieux i et j
$\theta = kd$	produit nombre d'onde distance
$\vec{U}$	vecteur déplacement dans le fluide
$\vec{u}$	vecteur déplacement dans le solide
$\mathbb{E}$	tenseur des déformation
τ, v	contrainte, vitesse de déplacement particulaire
$e^{f/s}$	dilatation des phases fluides / solides
b	coefficient de pertes visqueuses
$r_{ij}^{(v/\tau)}, t_{ij}^{(v/\tau)}$	coefficients de réflexion, de transmission de la vitesse particulaire/de la contrainte
r_{ij}, t_{ij}	coefficients de réflexion, de transmission en amplitude

termes relatifs aux décompositions modales

$\Phi, \vec{\Psi}$	potentiel scalaire, vecteur
$\vec{I}_{nm}^{(1/3)}$	vecteur déplacement longitudinal associé à l'harmonique sphérique nm
$\vec{M}_{nm}^{(1/3)}$	vecteur déplacement transversal associé à l'harmonique sphérique nm
$\vec{N}_{nm}^{(1/3)}$	vecteur déplacement transversal associé à l'harmonique sphérique nm
A_{nm}, B_{nm}, C_{nm}	coefficients de décomposition en harmoniques sphériques
$A_{nm}^{\nu\mu}, B_{nm}^{\nu\mu}, C_{nm}^{\nu\mu}$	éléments de la matrice de translation
T_i	opérateur de diffusion
T	matrice de diffusion
$T^{\parallel}$	élément de la matrice de diffusion
S	matrice de translation
X	vecteur d'amplitudes de décomposition en harmoniques sphériques
T_{MC}	matrice multicentrée

Termes relatifs aux théories de la diffusion multiple

g	coefficient de diffusion isotrope
$\langle g \rangle$	coefficient de diffusion isotrope moyen
E	fonction de propagation des déplacements
n	nombre de diffuseurs par unité de volume
s_i	paramètre de diffusion associé au diffuseur i

Grandeurs électriques et électro-acoustiques

BW	largeur de bande de réception
Fc, Fu	fenêtres de filtrage bas temps de vol, impulsion utile
V	tension électrique
I	intensité électrique
S_{ij}	paramètres S
$\hat{S}_{ij}$	paramètres S filtré
R_{ij}	paramètres S mesurés sur un milieu de référence
$\hat{R}_{ij}$	paramètres S mesurés sur un milieu de référence et filtré
s_{ij}	transformée de Fourier inverse du paramètre S_{ij}
s_{ii}^∞	transformée de Fourier inverse du paramètre S_{ii} pour l'émission dans un milieu semi infini
K_e, K_r	coefficients de conversion électro-acoustique, acousto-électrique
K_e^∞	coefficients de conversion électro-acoustique pour une émission dans un milieu semi infini
K_{ij}	facteur global de conversion électro-acousto-électrique
k_{ij}	transformée de Fourier inverse du facteur global K_{ij} apodisé par la fenêtre de mesure
T_{el}, T_{ac}	coefficients de transmission électrique (générateur transducteur), acoustique (transducteur transducteur)
Z_{el}	impédance électrique
Z_{el}^∞	impédance électrique d'un transducteur émettant dans un milieu semi infini
C_0	capacité statique d'un transducteur
Z_a	impédance acoustique ramenée en surface d'un transducteur par sa charge électrique
A	paramètre caractérisant l'acuité de résonance d'un transducteur

RESUME :

L'utilisation d'un système permettant le diagnostic et le suivi de l'état du squelette devient indispensable à la communauté médicale, notamment en raison de l'accroissement, avec l'augmentation de la durée de vie, du risque de fracture ostéoporotique. Comparés aux systèmes utilisant les rayons X, les systèmes ultrasonores présentent le grand avantage d'être sans risque pour le patient. Il nous a paru intéressant d'effectuer un travail en amont visant à mieux comprendre les interactions os-ultrasons. Afin de s'affranchir des contraintes inhérentes à l'expérimentation *in vivo*, nous nous sommes placés dans des conditions idéales de laboratoire, en terme de protocole de mesure et par l'utilisation de substituts osseux dont les paramètres géométriques sont contrôlables à volonté. La mesure seule des signaux transmis à travers un matériau aussi complexe que l'os nous renseigne très peu sur les interactions qui s'y produisent. Pour accéder à des paramètres fondamentaux tels que la taille des pores ou les caractéristiques mécaniques du milieu, il est essentiel de traiter les signaux mesurés sur la base d'hypothèses de propagation des ondes acoustiques dans le matériau.

Comme contribution à ce vaste sujet,

- nous présentons une revue des modèles de propagation dans les milieux hétérogènes :

Le premier chapitre est consacré à l'étude du modèle de Biot et des modèles de diffusion multiple. Nous comparons ces modèles, discutons de leur applicabilité au problème posé et les mettons en relation avec des résultats expérimentaux. Nous simulons la propagation dans les milieux que nous utilisons sur la base des modèles de Biot et de Waterman et Truell.

- nous mettons en place un système de mesure novateur :

Ce système fonctionne en régime harmonique. Nous modélisons les grandeurs mesurables par ce système dans le second chapitre. De leurs expressions littérales, nous présentons dans le troisième chapitre une technique de traitement du signal permettant d'obtenir les informations généralement obtenues par des systèmes de mesures plus usités.

- Nous produisons les résultats expérimentaux obtenus sur quelques échantillons de biomatériaux de substitution osseuse :

La dynamique importante du système de mesure permet l'étude de la propagation sur une large bande de fréquence. Nous présentons quelques résultats expérimentaux dans le quatrième chapitre. Ils font clairement apparaître le caractère hétérogène des milieux. Il en résulte un biais croissant avec la fréquence sur les mesures de la célérité et de l'atténuation de l'onde dans le milieu. Le système met en évidence un comportement spécifique des milieux hétérogènes dans la gamme haute fréquence.

Bibliothèque Universitaire de Valenciennes



900 043